Прямые и обратные задачи. Примеры.

Прямые задачи: причина $\to$? следствие

Обратные задачи: следствие $\to$? причина

Пример 1. $\exists\, m = 1$, масса точки движение по прямой

Ур-е дв-я
$$\begin{cases} x''(t) = \dfrac{d^2 x}{dt^2} = f(t) - \text{сила} = \text{причина, вызыв. дв-е.} \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$
Нач. усл.

Реш. этой задачи Коши $x(t) = \int\limits_0^t (t-\tau) f(\tau)\, d\tau$

Это прямая задача

Пример 2. ОЗ для той же мат. модели

Сила $f(t)$ неизв-на, а знаем $x(t)$. Найти $f(t)$ - т.е. причину.

Пример 3. Рассм. систему ОДУ

$$\begin{cases} x_1'(t) = \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \qquad a_{ij} = const \\ \ldots\ldots \\ x_n'(t) = \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \\ x_i(0) = x_i^0 \text{ - нач. усл-я} \end{cases}$$

Прямая задача - задача Коши для системы - $x_i(t)$ - реш. прямой задачи

Такие задачи встр-ся в хим. кинетике, когда ск-ть изм-я конц-ии $x_i(t)$ зависит от конц-ии $x_j(t)$ других веществ.

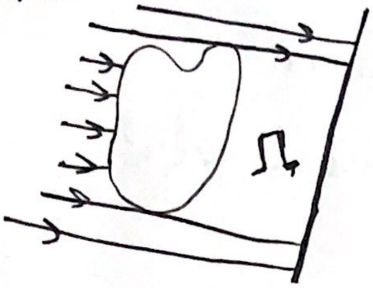
Эту ск-ть опр-ют a_{ij}. Обратная задача:

Пример 3'.

Опр-ть a_{ij} по заданным $x_i(t)$

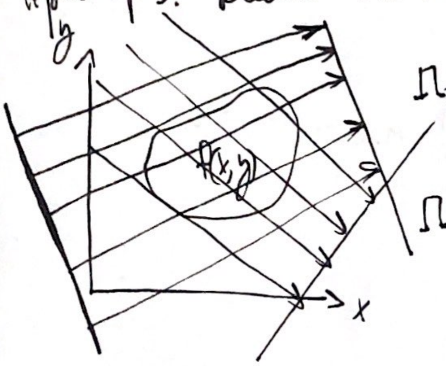
Пример 4. Распоз-е образов.

∃ на плоскости есть некот. фигура D, форма которой не известна, а известны её ортогональные проекции на прямую Π для любых её положений.



Задача расп-я: найти D (форму фигуры) по проекциям. Такая модель соотв-ет освещению тела плоской волной. Ясно, что если тело невыпуклое, то форму тела опр-ть нельзя, т.е. задача зависит от класса тел (объектов) — выпук-е, невыпук-е. Для более узкого класса фигур инф-ции м.б. задано меньше. Напр. сколько нужно проекций, чтобы опр. n-угольник?

Пример 5. Компь-ая томогр-я

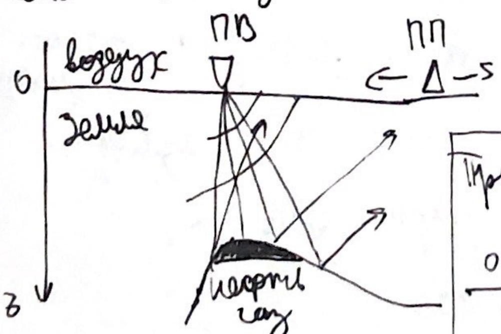


Изв-ны интегралы

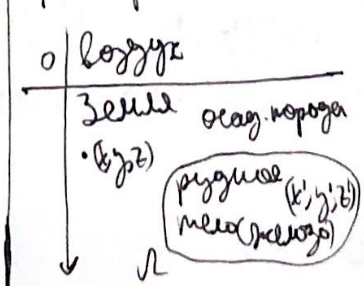
$$\int_L f(x,y)\,ds \text{ по всем прямым}$$

Требуется опр-ть $f(x,y)$ по всем инт-ам ≡ ≡ ортогон-ым проекциям. Эта задача возникает в медиц-ой томогр-ии, задачах неразруш. контроля изделий.

Пример 6. Разведка полезных ископаемых — обратная задача сейсмики. На дневной пов-ти Земли возбужд. сейсмические волны в ПВ, регистр-ются в ПП. Требуется восст-ть геологическую среду при $z>0$



Пример 7. ОЗ теории потенциала



Тело создаёт аномалию гравитац. пот-ла — ньютонова пот-ла

$$u(x,y,z) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x',y',z')\,dx'dy'dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

т-ка (x,y,z) вне тела

Корректные и некорректные задачи.

Осн. задача: u - данные, выч-ть $z = R(u)$, (1)

где $u \in U$, $z \in Z$, U, Z - метр-е пр-ва

Опр. Задача (1) наз. корр-ой по Адамару, если
1) реш-е z $\exists$ $\forall u \in U$,
2) реш. z ед. $\forall u \in U$,
3) реш. z непр. зависит от исх. данных u.

Если хотя бы одно из этих усл. не выполн., то задача наз. нек-ой

Примеры корр-ых и некорр-ых задач.

Пример 1. $\begin{cases} \ddot{x}(t) = f(t), & 0 \le t \le T \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$ $X = C[0,T]$, $F = C[0,T]$

$$x(t) = \int_0^t (t-\tau) f(\tau) d\tau \equiv R(f)$$

$z \equiv x(t) = R(u) \equiv R(f(t))$ или $x = R(f)$

1) Сущ-е? $\forall f \in F$ $\exists x \in X$, есть
2) Ед-ть? есть (в силу лин-ти R)
3) Уст-ть? $\|x_1 - x_2\|_X \le \frac{T^2}{2} \|f_1 - f_2\|_F$, есть

Пример 2. $\begin{cases} \ddot{x} = f(t), & 0 \le t \le T \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$ $X = C[0,T]$, $F = C[0,T]$

Дано $x(t)$, найти $f(t)$, т.е. выч-ть $f = R(x)$, где $f(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) \equiv R(x)$

1) Реш-е сущ. не для всех $x(t) \in X$
2) Ед-ть: если есть произв-я, то она выч-ся однозначно
3) Уст-ть: нет, т.к. ф-ии в C м.б. близки, а их произв-е далеки в C, напр

$x_0(t) = 0$, $x_n(t) = \frac{1}{n} \sin(nt)$

Пусть теперь $X = C^2[0,T]$ (метрика вкл-ет в себя первую и вторую произв-е) $F = C[0,T]$. В такой паре пр-в X, F задача корр-ая

Корр-ть задачи опр-ся качеством задачи и заданными пр-ми, в которых реш-ем данную задачу.

Пример 3. Система лин. ал. ур-ий $Az=u$, A - дано, u - дано, найти z

$A: R^n \to R^n$

Случай 1: $\det A \neq 0$ - задача корр-на, $z = A^{-1}u$ и $\|z\| \le \|A^{-1}\| \|u\|$

Случай 2: $\det A = 0$ - некорр-ть задачи

Пример 4. (Основной пример некорр-ой задачи - ур-е Фредгольма 1 рода)

$\int_a^b k(x,s) z(s) ds = u(x)$, $c \le x \le d$, $k(x,s)$ - дана, $u(x)$ - дана, найти $z(s)$, $z \in Z = C[a,b]$, $u \in U = C[c,d]$, $k(x,s)$, $k_x(x,s)$, $k_s(x,s)$ - непр-ны.

1) Сущ-е ? $\ominus$. Пусть $u \in C[c,d]$, но недиффеоренц. $\Rightarrow$ реш-е ур-я Ф. не сущ-ет

От противного: $\exists z \to \int_a^b k(x,s) z(s) ds$ - непр. диффер. по $x \Rightarrow \underbrace{\underbrace{\int_c^d k(x,s) z(s) ds}_{\text{диффер.}} = \underbrace{u(x)}_{\text{не диффер.}}}$, чего не м.б.

2) Ед-ть: ? зависит от ядра, т.е. от конкр-го вида $k(x,s)$, напр

$k(x,s) = e^{x+s}$ $\ominus$; $k(x,s) = e^{xs}$ $\oplus$

3) Уст-ть: нет. $z_0(s) = 0$, $z_n(s) = n \sin n^2 s$ $\Rightarrow \|z_0 - z_n\|_C = n \to \infty$, при $n \to \infty$

$Az \equiv \int_a^b k(x,s) z(s) ds = u(x)$; $\|u_0 - u_n\|_C = \|Az_0 - Az_n\|_C \le \max \left| \int_a^b k(x,s)(z_0(s) - z_n(s)) ds \right| \le$

$\le \max\limits_{[c,d]} \left| \int_a^b k(x,s) n \sin(n^2 s) ds \right| \le \max\limits_{[c,d]} \left| -\frac{1}{n} k(x,s) \cos n^2 s \Big|_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b k(x,s) \cos(n^2 s) ds \right| \le \frac{k_0}{n} + \frac{k_1}{n}(b-a)$

Рассм. вопрос о реш-ии опер-го ур-я $Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$, где Z, U - лин-е норм-е пр-ва. Очевидно, что задача будет корр-ой т. и т.т. когда сущ-ет непр-ый на U оп-р A^{-1}! Случай лин-го оп-ра A накрыв-ся Th. Банаха об обратном оп-ре.

Th. Если лин-ый огр-ый оп-р A отобр-ет всё банахово пр-во Z на всё банахово пр-во U взаимооди-но, то $\exists$ лин-ый огр-ый оп-р A^{-1}, отобр-ий U на Z.

Из Th следует, что, если лин-ый непр-ый оп-р A взаимооди-но отобр-ет Z на U (банаховы), то задача реш-я оп-го ур-я $Az = u$ явл-ся корр-ой. Причем, если опер-ор A непр-ен и ур-я $Az = 0$ имеет только нулевое реш-е, т.е. вып-но второе усл-е Адамара, то если $Az = u$ разрешима для $\forall u \in U$ (вып-но первое усл-е Адамара), тогда вып-но и третье усл Адамара.

Т.е.

A - л.н.; $A: Z \xrightarrow{\text{на}} U$, Z, U - банаховы

$\exists Az = 0 \Rightarrow z = 0$ и $\forall u \in U \; \exists z \in Z : Az = u \Rightarrow A^{-1}$ непр.

Т.о. сущ. непр A^{-1} - необх. усл-е вып-я усл-ий 2 и 1., т.е если A^{-1} не огр-ен (ненепр-ен), то не вып-но усл-е 1. (при вып-ии усл. 2).

В этой паре пр-в Z, U ур-е Ф. - некорр-я задача, т.к. уст-ти всегда нет.

$\not\exists$ оп-е ур-е $Az = u$ (1), A - лин. непр. оп-р $A: Z \to U$

Дано: A, $u \in U$. Найти $z \in Z$

Если $\exists A^{-1} \Rightarrow z = A^{-1}u$.

Если A^{-1} опр. на всём U и A непр., то задача корр-на (Th. Банаха)

Если A^{-1} опр. на всём U и A непр., то задача реш-я (1)

Если A вполне непр., а пр-во Z - бесконечномер-е, то задача реш-я (1) не корр-на. (шар в Z не компактен)

Если A вполне непр. и Z - беск-е, то A не имеет огр. обратного.

$\not\exists$ инт. ур-е Ф.:

$$Az = \int_a^b K(x,s) z(s) ds = u(x)$$

$$A: L_2[a,b] \to L_2[c,d], \text{ ядро } K(x,s): \int_a^b \int_c^d K^2(x,s) dx ds < \infty$$

A явл-ся вполне непр.

Условно корр-е или корр-е по Тихонову задачи

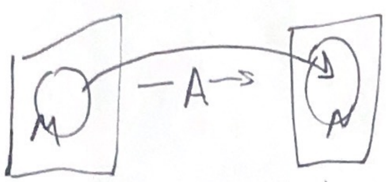
Рассм. оп-е ур-е $Az=u$. Дано: A, u, $u \in U$. Найти z, $z \in Z$. (1)

Пусть Z, U - (полные) метр-е пр-ва, пусть зад. (1) некорр-на

Тихонов: 1943 „Об уст-ти обратных задач".

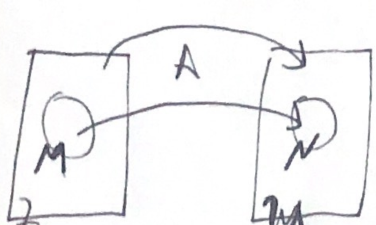
Th: $\exists A$ - непр. оп-р, вз-однозн. отобр-ий $M \subset Z$ на $N \subset U$. Тогда, если M - компакт, то A^{-1} непр-ен на $N = AM$

Док-во: Т.к. отобр. A вз.-однозн., то A^{-1} опр-ён на N



M-компакт, т.е. замкнут. комп-ое мн-во. Докажем, что A^{-1} непр. на N от противного. Предпол., что $\exists\, u_n \to \bar{u} \in N$ такая, что $z_n = A^{-1}u_n \not\to \bar{z} = A^{-1}\bar{u} \in M$. Тогда $\exists\, \varepsilon > 0\ \exists\, z_{n_k}$: $\rho(z_{n_k}, \bar{z}) \geq \varepsilon > 0$, где $\{z_{n_k}\} \subset \{z_n\}$ и $z_{n_k} \to z^* \in M$ (в силу того, что M - компакт). Т.к. оп-р A непр., то $Az_{n_k} = u_{n_k} \to \bar{u}$ при $k \to \infty \Rightarrow Az^* = \bar{u}$. Но $A\bar{z} = \bar{u} \Rightarrow z^* = \bar{z}$. С другой стороны, т.к. $\rho(z_{n_k}, \bar{z}) \geq \varepsilon > 0$, то $\rho(z^*, \bar{z}) \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow$ предп. неверно $\Rightarrow A^{-1}$ непр. на N.

$\exists\, Az=u$ - некорр. задача. Если A - непр. на M и вз.-однозн., то по теореме задача на мн-ах M и N корр-на. Т.о. можно сузить мн-во, на котором решаем задачу - задача станет корр-ой.



Опр. Задача $z = R(u)$ наз. корр-ой по Тихонову (усл-но корр-ой) на $M \subset Z$, $N \subset U$, если

1) реш-е z $\exists$ $\forall u \in N$ и $z \in M$,
2) реш z на M ед-но,
3) реш. z на M уст-во, т.е. непр. по u в метр-х Z, U.

На основе чего опр-ся компакт M? На основе априорной инф. качеств. и количеств. х-ра.

$z(s)$ монотонна и огр-на на $[a,b]$ - это мн-во компакт в $L_2[a,b]$

M наз. мн-вом корр-ти.

Задача опр-я правой части лин-го диффер. ур-я.

$\ddot{x}(t)=f(t)$, $x(t)$ - дано $\to$ найти $f(t)$

(1) $y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=F(x)$ - лин. диффер. ур., $c\leq x\leq d$,

$a_k(x)\in C[c,d]$, $a_k(x)$ - даны, $F(x)$ - неизвестно. Найти $F(x)$, если

дано $\bar{y}(x)$ - реш. ур-я (1). Если $\bar{y}(x)\in C^n[c,d]$, а $F\in C[c,d]$, то задача корр.

Норма в C^n считается со всеми произв-ми. Если $\bar{y}(x)\in C^p[c,d]$ и

$F\in C[c,d]$, $p<n$, то задача некорр-на.

Пусть $\bar{y}(x)$ - реш-е (1) $\to$ найти $F(x)$

$\bar{y}^{(i)}(c)=0$, $i=0,1,\ldots,k-1$,

$\bar{y}^{(j)}(d)=0$, $j=0,1,\ldots,m-1$, $k+m=n$

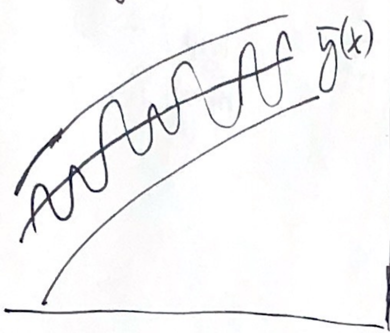
$\bar{y}(x)$ - реш-я краевой задачи для (1)

$$\bar{y}(x)=\int_c^d G(x,s)\underbrace{F(s)}_{\text{неизв.}}ds;\quad G\text{ - ф-я Грина}$$

ур-е Фредгольма со специальным ядром - ф-ей Грина.

Задача числ-го дифф-я.

Пусть $\bar y(x) \in C^n[c,d]$. Как правило, $\bar y$ неизв-но, а дано $y_\delta(x)$ такое, что $\|y_\delta(x) - \bar y(x)\|_{C[c,d]} \le \delta$.



Выч-е произв-ой от ф-ии, заданной прибл-но

Пусть $\bar y(x) \in C^1[c, d+\varepsilon]$, но $\bar y(x)$ неизв-на, а дано $y_\delta(x)$ такое, что $\max\limits_{[c,d+\varepsilon]} |\bar y(x) - y_\delta(x)| \le \delta$

Нужно построить $z_\delta(x)$ такую что $z_\delta(x) \rightrightarrows \bar y'(x)$, $x \in [c,d]$. Построим ф-ю $z_\delta(x)$: $z_{\delta_h}(x)$

Знаем $y_\delta(x)$ и $\delta \to 0$

$$z_{\delta_h}(x) = \frac{y_\delta(x+h) - y_\delta(x)}{h}, \quad h < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |z_{\delta_h}(x) - \bar y'(x)| = \left| \frac{y_\delta(x+h) - y_\delta(x)}{h} - \frac{\bar y(x+h) - \bar y(x)}{h} + \frac{\bar y(x+h) - \bar y(x)}{h} - \bar y'(x) \right| \le \frac{|y_\delta(x+h) - \bar y(x+h)|}{h} +$$

$$+ \frac{|y_\delta(x) - \bar y(x)|}{h} + |\bar y'(\theta) - \bar y'(x)| \le \frac{2\delta}{h} + \omega(h),$$ $\omega(h)$ — модуль непр-ти $\bar y'(x)$, $\omega(h) \to 0$ при $h \to 0$

$|z_{\delta_h}(x) - \bar y'(x)| \le \frac{2\delta}{h} + \omega(h)\ \forall x \in [c,d]$. Когда $\frac{2\delta}{h} + \omega(h) \to 0$? параметр метода h должен зависеть от δ: $h = h(\delta)$

1) $h(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$

2) $\frac{\delta}{h(\delta)} \to 0$ при $\delta \to 0$, т.е. h должен $\to 0$, но не очень быстро. Так $h = \delta^2$ не подходит, $h = \sqrt{\delta}$ подходит. Если $h = \delta$, то сх-ти нет.

Пример. $\exists\ \bar y(x) = 0$, $y_\delta(x) = \delta \sin\frac{x}{\delta}$, очевидно $\|y_\delta - \bar y\| \le \delta$, но

$$z_{h\delta}(0) = \frac{y_\delta(0+h) - y_\delta(0)}{h}\Big|_{h=\delta} = \frac{\delta \sin\frac{\delta}{\delta}}{\delta} = \sin 1 \not\to 0 \text{ при } \delta \to 0$$

если $h = \sqrt{\delta}$ $z_{h\delta}(0) = \frac{y_\delta(0+h) - y_\delta(0)}{h}\Big|_{h=\sqrt{\delta}} = \frac{\delta \sin\frac{\sqrt{\delta}}{\delta}}{\sqrt{\delta}}$.

Этот пример показывает, что наша оценка не грубая.

Если $h = \delta$, то уже сх-ти нет. $h \to 0$ медленнее, чем $\delta \to 0$. Очевидно, что $z_{h\delta}(x) \xrightarrow{C} \bar y'(x)$ при $h = C\delta^q$, $C, q > 0$, $q < 1$.

Рассм $\frac{d^2}{dx^2}$ и задачу вычисл. $y''(x)$. Пусть $\bar{y} \in C^2[c-\epsilon, d+\epsilon]$, вместо $\bar{y}(x)$ задана y_δ погрешн. с. $z_{\delta h}(x) = \frac{y_\delta(x-h) + 2y_\delta(x) + y_\delta(x+h)}{h^2}$

Алгоритм

$\|z_{\delta h} - y''\|_{C[c,d]} \le \frac{4\delta}{h^2} + \omega_2(h)$, дост. усл. сход. $\frac{\delta}{h^2} \to 0$, $h(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$

Задачи опр-я коэф-ов лин-ых дифер. ур-ий (и систем).

$y''+a_1y'+a_0y=0$. Задача об опред. a_0, a_1 по какому-нибудь $y(t)$

1) Если $y(x)\equiv 0$ - реш, то $\forall a_1, a_0 \Rightarrow$ ед. нет

2) Пусть $y(x)\not\equiv 0 \to$ пусть $y=const$ при $a_0=0 \Rightarrow a_1$ - любое $\Rightarrow$ ед. нет

3) $\Rightarrow$ Найти a_0, a_1 при $y(x)\neq const$

$\exists\, y(x)=e^x \Rightarrow 1+a_1+a_0=0 \Rightarrow$ реш. $a_1=p$, $a_0=-(p+1)$, p - любое действ. число - ед. нет

Общее реш-е $C_1e^x+C_2e^{-(p+1)x}$ ур. $y''+py'-(p+1)y=0$

Пусть $x\in[c,d]$ и если $\exists\, x_1,x_2\in[c,d]$: $\lambda^2+p\lambda-(p+1)=0$, $\lambda=1, -(p+1)$

$\bar{y}(x_1)\bar{y}'(x_2)-\bar{y}(x_2)\bar{y}'(x_1)\neq 0$, $\bar{y}(x)$ - точное реш-е $\Rightarrow$ при таком усл-ии будет единств. реш., т.к. $\begin{cases} a_1\bar{y}'(x_1)+a_0\bar{y}(x_1)=-\bar{y}''(x_1) \\ a_1\bar{y}'(x_2)+a_0\bar{y}(x_2)=-\bar{y}''(x_2)\end{cases}$ $\to \det\neq 0 \Rightarrow$ ед. реш.

Надо задавать два реш-я (лин. нез.), например $y_1(0)=0, y_1'(0)=1$, $y_2(0)=1, y_2'(0)=0$,

Рассм. лин. диф. ур. n-го порядка

(1) $y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+a_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x)+\ldots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=f(x)$; $a_i(x), f(x), i=0\div n-1$ непр. ф-ии

Обр. Задача: опр. все $a_i(x), f(x)$

Теорема 1. $\exists$ на $[c,d]$ заданы реш-я $y_i(x), i=0,\ldots,n$: $W(y_1,\ldots,y_n)|_{x=c}\neq 0$ и $y_0^{(i)}(c)=0$, $i=0\div n-1$. Тогда $a_i(x), i=0\div n-1$, $f(x)$ опред. однозн-но.

Док-во: Рассм. ф-ии $u_i(x)=y_i(x)-y_0(x)$, $i=1\div n$, $u(x)$ - реш. однородного ур-я (1) для $f(x)=0$. При этом $W(u_1,\ldots,u_n)|_{x=c}=W(y_1,\ldots,y_n)|_{x=c} \Rightarrow W(u_1,\ldots,u_n)|_{x=c}\neq 0$

$\Rightarrow W\neq 0$; $\begin{cases} a_{n-1}(x)u_1^{(n-1)}+a_{n-2}(x)u_1^{(n-2)}+\ldots+a_1(x)u_1'+a_0(x)u_1=-u_1^{(n)}(x) \\ \ldots\ldots \\ a_{n-1}u_n^{(n-1)}+a_{n-2}(x)u_n^{(n-2)}+\ldots+a_1(x)u_n'+a_0(x)u_n=-u_n^{(n)}(x)\end{cases}$ и

т.к. $W(u_1,\ldots,u_n)|_c\neq 0 \Rightarrow W\neq 0$ в $\forall$ т-ке $x\in[c,d]$ реш-е системы опр-ся однозн-но.

Задача частичного опр-я коэф-ов.

Считается, что $f(x)$ известна, неизв-ны $a_i(x)$ и $a_j(x)$.

Все $a_k(x)$, $k \neq i, j$ - изв-ны

Будем задавать $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – реш-я, заданные для опр-я $a_k(x)$

$$\begin{cases} a_i(x) y_1^{(i)} + a_j(x) y_1^{(j)} = F_1(x), \\ a_i(x) y_2^{(i)} + a_j(x) y_2^{(j)} = F_2(x). \end{cases}$$

Если же $\det = 0$, то не ясно, что делать.

Рассм. конкретную задачу.

$$y^{IV} + a_2(x) y'' + a_0(x) y(x) = 0, \qquad a_1 = 0,\ a_3 = 0$$

Если $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$, $D(x) = e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = 0$

Будет неоднозн-е опред. a_0, a_2

$$1 + a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -(1+p),\ p \text{ - произв. действ. число.}$$

Задача опр-я коэф-ов сист. лин. диффер. ур-ий.

(2) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) \end{cases}$ | Задача: Опр-ть $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} = const$. Дост-но ли задать $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$? НЕТ

Пусть, например, $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a_{11} + a_{12} = 3 \\ 3a_{21} + a_{22} = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Задача опр-я коэфф. по одному вектору реш. неединств-но разр-ма

(2) $\dot{\bar{x}} = A x$

Теорема 2. $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, A - $n \times n$ матрица, $A = const$, $A = \|a_{ij}\|$; $i,j = 1 \div n$.
Если на отрезке $[c,d]$ задано реш. системы (2) $\bar{x}(t)$ такое, что на $[c,d]$
$\exists\, t_k, k = 1 \div n: \bar{x}(t_k)$ лин-но нез-мы. Тогда a_{ij} опред. однозн-но.

Док-во: $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ - реш. системы по усл-ю

$\begin{cases} a_{11} x_1(t) + \ldots + a_{1n} x_n(t) = \dot{x}_1(t) \\ \ldots \\ a_{n1} x_1(t) + \ldots + a_{nn} x_n(t) = \dot{x}_n(t) \end{cases}$ | Найдём коэф. a_{ij}, вход. в 1-ую строку
$\begin{cases} a_{11} x_1(t_1) + \ldots + a_{1n} x_n(t_1) = \dot{x}_1(t_1) \\ \ldots \\ a_{11} x_1(t_n) + \ldots + a_{1n} x_n(t_n) = \dot{x}_1(t_n) \end{cases} \sim \begin{pmatrix} \bar{x}^T(t_1) \\ \bar{x}^T(t_2) \\ \ldots \\ \bar{x}^T(t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} =$

Т.к. $\det \neq 0$, то a_{ij} опред. однозн-но, $j = 1 \div n$. $\Rightarrow$ все a_{ij} опред. однозн-но.

Рассм. случай перем. коэфф. $a_{ij}(t)$ - непрер.

(3) $\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t)$, $a_{ij} \in C[c,d]\ \forall i,j = 1 \div n$.

Теорема 3. Пусть на $[c,d]$ заданы $\bar{x}^k(t)$, $k = 1 \div n$ - реш. сист. (3) такие, что $\bar{x}^k(c) = \bar{b}^k$ - лин. нез. векторы, то $a_{ij}(t)$ опред. однозн-но $[c,d]$

Док-во: Выпишем первые строки для $k = 1 \div n$

$\begin{cases} a_{11}(t) x_1^1(t) + \ldots + a_{1n}(t) x_n^1(t) = \dot{x}_1^1(t) \\ \ldots \\ a_{11}(t) x_1^n(t) + \ldots + a_{1n}(t) x_n^n(t) = \dot{x}_1^n(t) \end{cases}$ | $\det|_{t=c} \neq 0 \Rightarrow \det \neq 0\ \forall t \in [c,d]$. Действ-но,
$\det|_{t=c} = \det(\bar{b}^1 \ldots \bar{b}^n)^T = \det(\bar{b}^1 \ldots \bar{b}^n) \neq 0$ по усл.

Как правило, вместо $\bar{y}(x)$ задают $y_\delta(x)$. Если опр-ль $= 0$, то неясно, что делать

$\exists\, \|\bar{y}(x) - y_\delta(x)\|_{C[c,d]} \leq \delta$.

Пример. $y''+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=0$. Знаем $a_0(x)$. Нужно опр-ть $a_1(x)$.

Доп. усл-я $y(c)=y_0$, $y'(c)=y_1$?

Положим $a_1(x) = -\frac{y_\delta''(x)+a_0(x)y_\delta(x)}{y'(x)}$ — Не понятно, что делать.

Задача для ур-я теплопр-ти с обратным временем.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0<x<l,\ t_0<t\le T \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,t_0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Дано $u(x,T) = g(x)$, Найти $\varphi(x)$.
Будет ли реш-е этой задачи ед-ым и уст-ым

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n \xi}{l}\,d\xi\, e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(t-t_0)} \sin\frac{\pi n x}{l}$$ – реш-е прямой задачи

$$u(x,T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n \xi}{l}\,d\xi\, e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-t_0)} \sin\frac{\pi n x}{l} = g(x)$$

Т.к. оно лин-но, то задачу дост. иссл-ть в окр. нуля, т.е. $g(x)=0$

Умн. на $\sin\frac{\pi k x}{l}$ и $\int_0^l \_\, dx \Rightarrow$ при $k=n$ $\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n \xi}{l}\,d\xi = 0,\ n=1,2,\dots$, и

в силу полноты $\left\{\sin\frac{\pi n \xi}{l}\right\}$ в $L_2[0,l]$ $\varphi(x)=0$, т.е. ОЗ имеет ед. реш.

$u(x,T) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-t_0)}\sin\frac{\pi n x}{l} = g(x)$. Очевидно, реш. $\exists$ не $\forall g(x)\in L_2[0,l]$,

например, такой, что $g_n = e^{-n}$, тогда $\varphi_n = e^{-n+a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-t_0)} \to \infty$. Вообще

$g_n = \varphi_n e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-t_0)}$, но ряд $\sum g_n e^{2a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-t_0)}$ сх-ся не $\forall g(x)$

$\exists\ \varphi_k(x) = k\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi k x}{l},\ g_k(x) = \varphi_k\sqrt{\frac{2}{l}}\,e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2(T-t_0)}\sin\frac{\pi k x}{l};\ \|\varphi\|_{L_2[0,l]} = k \underset{k\to\infty}{\to} \infty$

$\|g\|_{L_2[0,l]} = k e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2(T-t_0)} \underset{k\to\infty}{\to} 0$, т.е. задача неуст-ва из L_2 в L_2.

$$\int_0^l K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = g(x),\ 0\le x\le l,\ \text{где}\ K(x,\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-t_0)}\sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n \xi}{l}$$

$K(x,\xi)$ явл. непр. на $[0,l]^2$

Запишем операт. ур-е $\sim$ ур-е Фредгольма I р.

$K\varphi = g$, K – вполне непр. $\Rightarrow$ задача некорр-на, т.к.

уст-ти нет. Задача будет некорр-ой из $C^0[0,l]$ в $C[0,l]$

Получим оценку уст-ти для этой задачи ($a^2=1$)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0\le x\le l, \quad t_0-\varepsilon\le t\le T, \quad u(x,t)\in C^{2,1}([0,l]\times[t_0-\varepsilon,T]) \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \\ \text{нач. усл-я пока не ставим} \end{cases}$$

Рассм. $f(t)=\int_0^l u^2(x,t)\,dx$; $f'(t)=2\int_0^l u(x,t)u_t(x,t)\,dx$; $f''(t)=2\int_0^l u(x,t)u_{tt}(x,t)\,dx+2\int_0^l u_t^2(x,t)\,dx$

Из ур-я имеем: $u_{tt}=(u_t)_t=(u_{xx})_t=(u_t)_{xx}=u_{xxxx}\Rightarrow$

$$\Rightarrow f''(t)=2\int_0^l u(x,t)\overset{u_{xxxx}}{u_{tt}}(x,t)\,dx+2\int_0^l u_t^2(x,t)\,dx=2\Big\{u_{xxx}(x,t)\overset{0}{u}(x,t)\Big|_0^l-u_x(x,t)\overset{u_t(x,t)}{u_{xx}}(x,t)\Big|_0^l+$$

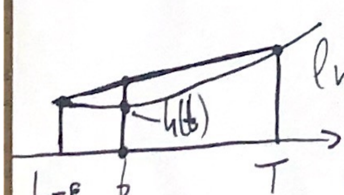
$$+\int_0^l u_{xx}^2(x,t)\,dx\Big\}+2\int_0^l u_t^2(x,t)\,dx=4\int_0^l u_t^2(x,t)\,dx, \text{ т.к. } u_{xx}(x,t)\Big|_{x=0,l}=u_t(x,t)\Big|_{x=0,l}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\Big|_{x=0,l}=0.$$

Введём $h(t)=\ln f(t)$ и покажем, что $h''(t)\ge 0$ при $t\in[t_0-\varepsilon,T]$

$$h''(t)=\frac{d}{dt}\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{f''(t)f(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}=\frac{1}{f^2(t)}\Big\{4\int_0^l u_t^2(x,t)\,dx\int_0^l u^2(x,t)\,dx-4\Big(\int_0^l u(x,t)u_t(x,t)\,dx\Big)^2\Big\}$$

$\Rightarrow$ по нер-ву Коши Бун-го $h''(t)\ge 0$ при $t\in[t_0-\varepsilon,T]$. Т.о. из выпуклости $h(t)$ на $[t_0-\varepsilon,T]\Rightarrow h(t)\le h(t_0-\varepsilon)\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}+h(T)\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}$ или



$$\ln f(t)\le\frac{T-t_0}{T-(t_0-\varepsilon)}\ln f(t_0-\varepsilon)+\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}\ln f(T)\Rightarrow$$

$$f(t)\le\big[f(t_0-\varepsilon)\big]^{\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}}\big[f(T)\big]^{\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}} \quad \text{при } t\in[t_0-\varepsilon,T]$$

Рассм-м теперь $u_i(x,t)$ удовл. ур-ю и краев. усл. и такие, что

$\int_0^l u_i^2(x,t_0-\varepsilon)\,dx\le C^2$, $i=1,2$, $C>0$. $\exists\; u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)\Rightarrow$

$$\int_0^l|u_1(x,t)-u_2(x,t)|^2dx\le\Big[\int_0^l u^2(x,t_0-\varepsilon)\,dx\Big]^{\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}}\Big[\int_0^l u^2(x,T)\,dx\Big]^{\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}}$$

Положим $t = t_0$

$$\int_0^l u^2(x,t_0)\,dx \le (4C^2)^{\frac{T-t_0}{T-(t_0-\varepsilon)}}\left[\int_0^l u^2(x,T)\,dx\right]^{\frac{\varepsilon}{T-(t_0-\varepsilon)}}$$ или $\|u_1(x,t_0)-u_2(x,t_0)\|_{L_2[0,l]} \le$

$$\le (2C)^{\frac{T-t_0}{T-(t_0-\varepsilon)}}\|u_1(x,T)-u_2(x,T)\|_{L_2[0,l]}^{\frac{\varepsilon}{T-(t_0-\varepsilon)}}$$

Эта оценка получена лишь в предпол-ии огр-ти $\|u_i(\cdot,t_0-\varepsilon)\|_{L_2[0,l]}$

что не выделяет компакт в L_2 непоср-но.

Однако, огр-ть в $L_2[0,l]$ требуется при $t = t_0-\varepsilon$, а не t_0

Введём мн-во (класс) ф-ий $U_{t_0-\varepsilon} = \{u(x,t_0-\varepsilon),\ \|u(x,t_0-\varepsilon)\|_{L_2[0,l]} \le C\}$

Переход от $u(x,t_0-\varepsilon)$ к $u(x,t_0)$ как результат действия интегр-го оп-ра K_ε

$\int_0^l K_\varepsilon(x,\xi)u(\xi,t_0-\varepsilon)\,d\xi = u(x,t_0)$, с ядром $K_\varepsilon(x,\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\varepsilon}$.

Т.к. ядро непр-но на $[0,l]^2$, то K_ε – вполне непр. оп-р. След-но, он

переводит огр. мн-во $U_{t_0-\varepsilon}$ в комп-е $U_{t_0} = K_\varepsilon U_{t_0-\varepsilon}$ в $L_2[0,l]$

След-но, получ-я оценка уст. имеет место на компакте

U_{t_0} в $L_2[0,l]$.

Задача опр-я нач-го распр-я темп-ры по изм-ю темп-ры в т-ке.

$$\text{ПЗ}\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0<x<l,\ 0<t\le T \\ u_x(0,t) = u_x(l,T) = 0, & 0<t\le T \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0\le x\le l \end{cases}$$

ОЗ: $\varphi(x)$ неизв-на и её треб. найти, если дана $g(t) = u(x_0,t)$, $0<t_1\le t\le T$, $x_0\in[0,l]$

$$u(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\,d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi \times \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 t\right\}\cos\frac{\pi n x}{l},$$ откуда

$$u(x_0,t) = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\,d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi\, e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\cos\frac{\pi n x_0}{l} = g(t) \quad (1)$$

$0<t_1\le t\le T$; $\Rightarrow$ изм. порядок $\sum$ и инт. (1) $\int_0^l K(t,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = g(t)$, $t\in[t_1,T]$,

где $K(t,\xi) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n\xi}{l}\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\cos\frac{\pi n x_0}{l}$. Это некорр-я задача, т.к. $K(t,\xi)$ — непр., след-но $K\varphi = g$ — ур-е с вполне непр. оп-ом и уст. нет. (Исслед. задачу же!)

Теорема. Пусть $\cos\frac{\pi n x_0}{l} \ne 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Тогда реш. (1) ед-но в $L_2[0,l]$.

Док-во: Дост. д-ть, что при $g=0$ (1) имеет лишь трив. реш-е.

Запишем (1) при $g=0$.

$$\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\cos\frac{\pi n x_0}{l} = 0, \quad t_1\le t\le T \quad (2)$$

Рассм. $F(z) = \varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 z}\cos\frac{\pi n x_0}{l}$ при $\operatorname{Re} z>\alpha$, $0<\alpha<t_1$.

Док-ем, что $F(z)$ аналитична в обл. $\operatorname{Re} z>\alpha$. Запишем общий член мажорир. числ-го ряда $\left|\varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 z}\cos\frac{\pi n x_0}{l}\right| \le |\varphi_n|\left|e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \operatorname{Re} z}\right| \cdot \left|e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 i\operatorname{Im} z}\right| \le |\varphi_n|\cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\alpha} \le C\cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\alpha}$ — член сход. ряда $\Rightarrow$ по Th. Вейерштр-са ряд сход. равн-но и $F(z)$ — аналит-на при $\operatorname{Re} z>\alpha$

$F(z)=0$ при $z\in[t_1,T]$ $\Rightarrow$ (в силу теор. ед-ти) $F(t)=0$ для $t>\alpha$, т.е. с маленького отрезка может перейти на полупрямую.

Перейдём в (2) к пределу при $t\to\infty$ $\Rightarrow$ $\varphi_0=0$. Домножим (2) на $e^{+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_1 \cos\frac{\pi x_0}{l} + \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t + \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \cos\frac{\pi n x_0}{l} \to 0$ и $t \to \infty$

$\Rightarrow \varphi_1 \cos\frac{\pi x_0}{l} = 0$ и т.д.; $\varphi_n \cos\frac{\pi n x_0}{l} = 0 \Rightarrow \varphi_n = 0 \; \forall n = 0, 1, \ldots,$

Отсюда в силу полноты $\left\{\cos\frac{\pi n x}{l}\right\}$ в $L_2[0, l]$ следует, что $\varphi(x) = 0$, т.т.д.

$\exists\, x_0 = 0$ или $x_0 = l$. Тогда $\cos\frac{\pi n x_0}{l} = \pm 1$, т.е. ед-ть

$\exists\, x_0 = \frac{l}{\sqrt{2}}$, тогда $\cos\frac{\pi n x_0}{l} \neq 0 \quad \forall n = 0, 1, \ldots$

Если $x_0 = \frac{p}{q} l$, то $\cos\frac{\pi n p}{q} = 0$ при $\frac{\pi n p}{q} = \frac{\pi}{2}(2s+1)$

$\frac{p}{q} = \frac{2s+1}{2n}$, т.е. неед. при p-нечёт, q-чётном.

Например, если $\varphi(x) = \cos\frac{\pi x}{l}$, то

$$u(x, t) = \cos\frac{\pi x}{l} e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \text{ и } u(x_0, t) = 0 \text{ при } x_0 = \frac{l}{2}$$

Задача опр-я источника в ур-ии теплопр-ти.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x)g(t), & 0<x<l,\ 0<t\le T \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, & 0<t\le T \\ u(x,0) = \varphi(x) = 0, & 0\le x\le l \end{cases}$$

Доп. данные $u(x_0,t) = h(t)$, $0\le t\le T$, $x_0\in[0,l]$

ОЗ: N1 Даны $f(x)$, $h(t)$, найти $g(t)$ $0\le t\le T$

N2 Даны $g(t)$, $h(t)$, найти $f(x)$, $0\le x\le l$

ПЗ

ОЗ N1. $u(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)d\xi \int_0^t g(\tau)d\tau + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}d\xi\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2(t-\tau)}g(\tau)d\tau\cos\frac{\pi n x}{l}$

Положим $x=x_0$.

$$u(x_0,t) = \underbrace{\frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)d\xi}_{f_0}\int_0^t g(\tau)d\tau + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}d\xi}_{f_n}\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2(t-\tau)}g(\tau)d\tau\cos\frac{\pi n x_0}{l} = h(t)$$

или $\int_0^t k(t,\tau)g(\tau)d\tau = h(t)$, $0\le t\le T$, (3); $k(t,\tau) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n\cos\frac{\pi n x_0}{l}e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2(t-\tau)} = k(t-\tau)$;

(3) – интегр. ур-е Вольтерра I рода.

Теорема. Пусть $f\in C^4[0,l]$ и $f'(0)=f'(l)=0$ и $f(x_0)\ne 0$. Тогда если $h\in C^1[0,T]$ и $h(0)=0$, то $\exists!$ реш. ур-я (3) из $C[0,T]$

Док-во. $f_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}d\xi$ и $f\in C^4$; $|f_n|\le\frac{c}{n^4}$, $n=1,2,\dots$, действ-но

$$f_n = \frac{2}{l}f(\xi)\left(+\frac{l}{\pi n}\right)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\Big|_0^l - \frac{2}{l}\frac{l}{\pi n}\int_0^l f'(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi = \frac{2}{l}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2 f'(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}\Big|_0^l -$$

$$-\frac{2}{l}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\int_0^l f''(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}d\xi = \{\text{ещё два раза по частям}\}\dots\le\frac{c}{n^4}.$$

Докажем, что $k(t,\tau)$ непр. и дифер. $k_t(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{f_n\cos\frac{\pi n x_0}{l}\left(-\frac{\pi n a}{l}\right)^2}_{a_n}e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\theta}$ и $|a_n|<\frac{c}{n^2}$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{n^2}e^{-n^2\theta}$ сх. равн-но $\Rightarrow k(\theta)\in C^1[0,T]$. Продифер. (3) $\Rightarrow$

$\Rightarrow k(t,t)g(t) + \int_0^t k_t(t,\tau)g(\tau)d\tau = h'(t)$, $t\in[0,T]$,

$k(t,t) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n\cos\frac{\pi n x_0}{l} = f(x_0)\ne 0$, откуда

(4) $g(t) + \frac{1}{f(x_0)} \int_0^t k_t(t,\tau) g(\tau) d\tau = \frac{1}{f(x_0)} h'(t)$ - ур-я Вольтерра II рода $\Rightarrow$

реш (4) $\exists$ и ! $\Rightarrow$ реш. (3) $\exists$ и !

ОЗ 2. $g(t)$ известно, найти $f(x)$.

] $g(t) = 1$. Тогда из реш. прямой задачи

$$u(x_0,t) = \frac{1}{l} \int_0^l f(\xi) d\xi \cdot t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos\frac{\pi n \xi}{l} d\xi \cdot \left(\frac{l}{\pi n a}\right)^2 \left[1 - e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\right] \cos\frac{\pi n x_0}{l} = h(t) \text{ или}$$

$$\int_0^l K(t,\xi) f(\xi) d\xi = h(t), \quad 0 \le t \le T, \text{ где } K(t,\xi) = \frac{t}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{l}{\pi n a}\right)^2 \cos\frac{\pi n x_0}{l} \cos\frac{\pi n \xi}{l} \left[1 - e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\right]}_{|\ldots| \le \frac{c}{n^2}}$$

т.е. ряд сх. равн-но, след-но $K(t,\xi)$ - непр. ядро,

задача некорр-на.

Ед-ть и неед-ть зависит от выбора т. x_0, см. выше

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x) g(t)$$

$u(x_0,t) = h(t) \longrightarrow g(t) = ?$ Ур-е Вольтерра I р. $\Rightarrow$ т. $\exists$!

при $h(t)$ - дифф., $h(0) = 0$. задача корр.

$f(x) = ?$ Ур. Фредгольма I р. задача некорр.

Задача Коши для ур-я Лапласа

$u_{xx}+u_{yy}=0,\ -\infty<x<\infty,\ y>0,$
$u(x,0)=\varphi(x),\quad -\infty<x<\infty,$
$u_y(x,0)=\psi(x),\ -\infty<x<\infty$

Покажем, что эта задача некорр-на
Пусть $\overline{\varphi}(x)=\overline{\psi}(x)=0,\ -\infty<x<\infty \Rightarrow \overline{u}(x,y)\equiv 0,$ $|x|<\infty, y>0$
$\varphi_n(x)=\frac{1}{n}\sin nx,\ \psi_n(x)=0$
$\sup|\varphi_n(x)-\overline{\varphi}(x)|=\frac{1}{n}\to 0,\ n\to\infty$

$u_n(x,y)=\frac{1}{n}\sin nx\ ch\, ny,\ y=0\quad u_n(x,y)\Big|_{y=0}=\varphi_n(x)$

Для $u(x,y)$ выполн. нач. усл.

$\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ y\geq 0}}|u_n(x,y)-\overline{u}(x,y)|\to\infty$ при $n\to\infty,\ x_n=\frac{\pi}{2n},\ y=1$, будет стремление к ∞

Задача на отрезке (начально-краевая задача для ур-я Лапласа)

$u_{xx}+u_{yy}=0,\ 0<x<l,\ y>0,$
$u(0,y)=u(l,y)=0,\ y>0,$
$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\leq x\leq l,$
$u_y(x,0)=\psi(x),\ 0\leq x\leq l.$

Задача: найти $u(x,b)=f(x),\ 0\leq x\leq l$.
Это обратная задача Дирихле, т.к. 0, f и 0, 0 явл. усл. Дирихле для ур-я Лапласа.
Реш-е задачи Дирихле (прямого) наход-ся с помощью метода раздел-я пер-х.

$$u(x,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi\,\frac{sh\frac{\pi n}{l}(b-y)}{sh\frac{\pi n}{l}b}\sin\frac{\pi nx}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi\,\frac{sh\frac{\pi n}{l}y}{sh\frac{\pi n}{l}b}\sin\frac{\pi nx}{l}$$

Здесь $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi\,\frac{sh\frac{\pi n}{l}(b-y)}{sh\frac{\pi n}{l}b}\sin\frac{\pi nx}{l}=\Phi(x,y)$ - извест-я ф-я

$$u_y(x,0)=\Phi_y(x,0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\frac{\pi n}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi\frac{1}{sh\frac{\pi nb}{l}}\sin\frac{\pi nx}{l}=\psi(x),\ 0\leq x\leq l$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n}{l^2}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi\,\frac{\sin\frac{\pi nx}{l}}{sh\frac{\pi nb}{l}}=\psi(x)-\Phi_y(x,0)\equiv\Psi(x).$$

получ. ур-е Фредгольма I рода отн. $f(x)$:

$$\int_0^l K(x,\xi)f(\xi)d\xi=\Psi(x),\ 0\leq x\leq l;\quad K(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n}{l^2\, sh\frac{\pi nb}{l}}\sin\frac{\pi n\xi}{l}\sin\frac{\pi nx}{l},$$

это равн. сх. ряд $\Rightarrow K(x,\xi)$ - непр., а инт. оп-р вполне непр-ен, след-но задача неустойч-ва из $L_2[0,b] \to L_2[0,l]$ и из $C[0,l]$ в $C[0,l]$.

Ед-ть реш. есть: $\psi(x) \equiv 0 \Rightarrow f(t) = 0$ $t \in [0,l]$, т.к.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2\pi n}{l^2 \operatorname{sh}\frac{\pi n b}{l}} f_n}_{g_n} \sin\frac{\pi n x}{l} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^2 < \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^2 = 0 \Rightarrow g_n = 0 \sim \frac{2\pi n}{l^2 \operatorname{sh}\frac{\pi n l}{l}} f_n = 0 \sim f_n = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(t) = 0$ ч.т.д.

Обратные задачи ~~теории~~ потенц-ов.

$$\vartheta(x,y,z) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} dx'dy'dz'$$ – Ньютонов потен-ал.

Если $\vartheta(x,y,z)$ известна в нек. обл. T: $T \cap \Omega = \emptyset$, то это рав-во явл. ур-ем отн. $\rho(\cdot)$ в неизвестной обл. Ω. Вопрос, можно ли одновр. опр-ть $\rho(\cdot)$ и Ω.

Рассм. задачу для шара $Ш_{0,a}$ $x^2+y^2+z^2 \le a^2$, и пусть $\rho = \rho(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, тогда

$$\vartheta(x,y,z) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta.$$

В силу сфер. симметрии $\vartheta = \vartheta(R)$, где $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \vartheta(R) = \int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{\rho(r) r^2 \sin\theta \, d\varphi d\theta dr}{\sqrt{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}} = 2\pi \int_0^a\int_0^\pi \frac{\rho(r) r^2 \sin\theta \, d\theta dr}{\sqrt{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}} \ (=)$$

$$\theta \to t, \ t = \sqrt{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}; \ \left\|\frac{D(t,r)}{D(\theta,r)}\right\| = \left\|\begin{matrix} t_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| = |t_\theta| = \frac{R\cdot r\cdot\sin\theta}{t};$$

$$(=) \ 2\pi \int_0^a\int_{R-r}^{R+r} \frac{\rho(r) r^2 \cancel{\sin\theta}}{\cancel{t} R r \cancel{\sin\theta}} \cancel{t} \, dt dr = 2\pi \int_0^a\int_{R-r}^{R+r} \frac{\rho(r) r}{R} dt dr = \frac{4\pi}{R}\int_0^a \rho(r) r^2 dr$$

ОЗ №1. Дан потен-ал ϑ. Найти ρ и $\partial\Omega \equiv \Sigma$.

Если $\rho(r) = \text{const} = \rho_0$, то $\vartheta\big|_{\Sigma_R} = \frac{4\pi}{R}\frac{\rho_0 a^3}{3} = \frac{4\pi}{3}a^3\rho_0\frac{1}{R} = \frac{M}{R}$

В этом случае при $\rho_{0,1} a_1^3 = \rho_{0,2} a_2^3$ имеем на Σ_R один потен-ал – ед. реш ОЗ нет

ОЗ №2. Дан потен-ал ϑ и Σ. Найти ρ.

Пусть a фикс-но и изв-но. $\int_0^a \rho(r) r^2 dr = \frac{\vartheta\big|_{\Sigma_R} R}{4\pi} = A = \text{const}$.

Очевидно, что $\rho(r)$ опр. неед-ым образом, например, $\exists\, \rho(r) = cr+d$, тогда $\int_0^{a=1} \rho(r) r^2 dr = \frac{c}{4}+\frac{d}{3} = A$, и ед. нет.

Обр. задача №3. Дан потен-ал ϑ и ρ. Найти Σ

Эта задача лучше чем №2, т.к. неизв-я ф-я $2^{х}$ переменных.

Постановка ОЗ: $\exists\, \Omega \subset Ш_{0,A}$ и $\vartheta(M)\Big|_{M\in\Sigma_A}$ - известна.

Опр. $\Sigma = \partial\Omega$, если $\rho(\cdot)$ известна ($\rho = const$)

Теорема (П.С. Новиков). Если Ω - звёздное тело, то его форма опр. ед-ным образом ($\partial\Omega \in \bar{C}^1$).

Тело наз. звёздным отн. т-ки M_0, если $\forall$ луч, провед-ый из этой т-ки пересекает Σ в $1^{ой}$ т-ке. В этом случае имеем ур-е

$$u(x,y,z)\Big|_{M(x,y,z)\in\Sigma_A} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\int_0^{\sigma(\varphi,\theta)} \frac{\rho_0 r^2 \sin\theta\, dr}{\sqrt{(x-r\cos\varphi\sin\theta)^2+(y-r\sin\varphi\sin\theta)^2+(z-r\cos\theta)^2}}\right] d\theta\, d\varphi$$

или $K\sigma = u\Big|_{\Sigma_A}$ - нелин-е ур-е

Обратные задачи для ур-я колебаний.

(1) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0<x<l$, $t>0$

(2) $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $t>0$

(3) $u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \le x \le l$

(4) $u_t(x,0) = \psi(x)$,

Дано: $u(x,T) = g(x)$, $0 \le x \le l$. Найти нач. усл.

ОЗ1: Даны $g(x), \psi(x)$, найти $\varphi(x)$

ОЗ2: Даны $g(x), \varphi(x)$, найти $\psi(x)$

ОЗ1. Пусть для простоты $\psi(x) = 0$. Выпишем реш-е на основе метода Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin\frac{\pi n s}{l}\, ds \cos\frac{\pi n}{l} a t \sin\frac{\pi n}{l} x;$$

Ур-е для ОЗ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin\frac{\pi n s}{l}\, ds \cos\frac{\pi n}{l} a T \sin\frac{\pi n}{l} x = g(x), \quad 0 \le x \le l.$$

Это ур-е м.б. записано в виде:

$A_T \varphi = g$, где $A_T : L_2[0,l] \to L_2[0,l]$; $A_{\frac{2l}{a}} = E \Rightarrow \varphi = g$ — корр-я задача

Пусть $T_{p,q} = \frac{2p}{2q-1} \frac{l}{a} \Rightarrow \cos\frac{\pi n a T}{l} = \cos\frac{2pn\pi}{2q-1} \ne 0$ $\forall n$ при фикс. $p, q \in \mathbb{N}$

Докажем это (от противного): $\exists$ $\frac{2pn\pi}{2q-1} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ или $\overset{\text{чёт}}{4pn} = \overset{\text{нечет}}{(2k+1)}\overset{\text{нечет}}{(2q-1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\frac{2pn\pi}{2q-1} \ne 0$ $\forall n$. $f(n) = \cos\frac{2pn\pi}{2q-1}$ — целочисл-я ф-я, период-я, т.к.

$f(n+2q-1) = f(n) \Rightarrow \left|\cos\frac{2\pi n p}{2q-1}\right| \ge c > 0$ $\forall n$.

Если $g \in L_2[0,l]$, то $g = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(g, \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n}{l} x\right)}_{g_n} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n}{l} x$ и $\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 < \infty \Rightarrow$

1) реш. ОЗ1 $\exists$ и $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\cos\frac{\pi n a}{l} T_{p,q}} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n}{l} x$, т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{\cos^2 \frac{\pi n a}{l} T_{p,q}} \le$

$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{c^2} \Rightarrow \exists$, ед-но, уст-во и $\|\varphi\|_{L_2} \le \frac{1}{c} \|g\|_{L_2}$

Пусть теперь $T_{p,q} = \frac{(2q-1)l}{2pa}$ — задача некорр-на

Пример неед-ти $\cos\frac{\pi a n T_{p,q}}{l} = \cos\frac{\pi n (2q-1)}{2p}\Big|_{n=p} = \cos\frac{\pi}{2}(2q-1) = 0$

Тогда для для $g(x)=0$ имеем $\to \varphi(x)=0$, $\to \varphi(x)=\sin\frac{\pi p}{l}x$

Почему для некот-ых t оп-р A_t опр-ет корр-ю, а для сколь угодно близких некорр-ю задачу? Ответ: оп-р A_t не явл. непр-ым по t, т.е. $\|A_{T_1}-A_{T_2}\|$ большая при $|T_1-T_2|$ маленькой, т.к. если взять $T_1=t_0=\frac{2l}{a}$, а $T_2=t_{0k}=\frac{(4k-1)l}{2ka}\to t_0$, при $k\to\infty$. То $A_{t_0}=E$ и $\|A_{t_{0k}}-A_{t_0}\|=$

$$=\sup_{\|\varphi\|_{L_2[0,l]}\le 1}\|(A_{t_{0k}}-E)\varphi\|_{L_2[0,l]}=\sup_{\|\varphi\|_{L_2}\le 1}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^2\left(\cos\frac{\pi(4k-1)n}{2k}-1\right)^2\right\}^{1/2}.$$

Т.к. при $k=n$ $\cos\frac{\pi(4k-1)n}{2k}=0$, то $\|A_{t_{0k}}-A_{t_0}\|\ge 1$

ОЗ 2. $\exists\ \varphi(x)=0$. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\psi(s)\sin\frac{\pi n s}{l}ds\,\frac{l}{\pi a n}\sin\frac{\pi n}{l}at\,\sin\frac{\pi n x}{l}$, $0\le x\le l$, $t\ge 0$

Ур-е для ОЗ при $t=T$.

$$A_T\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\psi(s)\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds\,\frac{l}{\pi n a}\sin\frac{\pi n}{l}aT\sin\frac{\pi n x}{l}=g(x)$$ или $A_T\psi=g$, g - изв. ψ - ?

Ед-ть или неед-ть зависит от $\sin\frac{\pi n a}{l}T$

За счёт выбора $\frac{l}{\pi n a T}$ задача сводится к корр. или некорр.

Имеем $\psi_n=\frac{g_n}{\sin\frac{\pi n a T}{l}}\frac{\pi n a}{l}$. Для существ. необх. сх-ти ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n^2}{\left(\sin\frac{\pi a T n}{l}\right)^2}\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2$. Но такого T для $\forall g\in L_2$ нет. Берём $g_n\sim\frac{1}{n}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}g_n^2<\infty$, но $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n^2}{\left(\sin\frac{\pi n a T}{l}\right)^2}\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\ge\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2\frac{1}{n^2}=\infty$, т.о. реш.

ОЗ 2 сущ-ет не для $\forall g(x)\in L_2$.

Задача опр-я коэфф-та в ур-ии теплопр-ти.

(1) $u_t = k(t) u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $0 < t \le T$, $k(t) > 0$

(2) $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $0 \le t \le T$

(3) $u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \le x \le \pi$

ОЗ: $k(t)$ неизв-на. Найти $k(x)$, если изв. $g(t) = u(x_0, t)$, $t \in [0,T]$, $x_0 \in (0,l)$

Ед-ти в ОЗ 1 нет (для произв T)

Это говорит о том, что задача опр-я $\varphi \in L_2[0,l]$ по $g_n = A_T \varphi$, $\varphi \in L_2[0,l]$ пост. плохо. Что должен ~~[illegible]~~ сделать „чистый" математик и „мат-ик-прикладник". Первый - перешать, второй - поставить по-другому.

Рассм. частный случай $l = \pi$, $a = 1$.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < \pi \\ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Дано: $g(x) = u(x,T)$, найти $\varphi(x)$.

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\varphi_n \cos nT}_{g_n} \sin nx,$$

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^T \varphi(\xi) \sin n\xi \, d\xi$$

$\cos nT \cong 0$, что делать?

$nT = \frac{\pi}{2}(2k+1) + \dots$, но $2nT = \pi(2k+1) \ne 0$

Пусть $f(x) = u(x, 2T)$. Тогда $f_n = \varphi_n \cos 2nT = \varphi_n(-1 + 2\cos^2 nT) = -\varphi_n + 2 g_n \cos nT$

$\Rightarrow \varphi(x) = -f(x) + 2[A_T g](x) = -f(x) + 2 A_T g(x)$, где $[A_T \alpha](x) = \beta(x)$

переводит $\begin{cases} u(x,0) = \alpha(x), \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \to \beta(x)$.

Если $g(x) = \frac{1}{\tau} \int_T^{T+\tau} u(x,t)\, dt$, то задача услож-ся, больше τ - плохо.

$$\text{ПЗ}\begin{cases} u_t = k(t)u_{xx}, & 0<x<\pi,\ 0<t\le T \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & 0\le t\le T \\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\le x\le \pi,\ k(t)>0 \end{cases}$$

Найти $k(t)$, если дана : ОЗ
$g(t)=u(x_0,t)$, $t\in[0,T]$, $x_0\in(0,l)$

Решение ПЗ

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\xi)\sin n\xi\, d\xi\, e^{-n^2\int_0^t k(\tau)d\tau}\sin nx.$$

На самом деле $u(x,t;k)$ - зависит от k оп-ым образом

Положим $x=x_0$. $u_t(x_0,t;k)=k(t)\,u_{xx}(x_0,t;k)=g'(t)$, $0\le t\le T$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow k(t)=\frac{g'(t)}{u_{xx}(x_0,t;k)}\equiv Ak \text{ или } k=Ak$$

Докажем, что такое ур-е имеет ед-е реш-е в малом. Наложим усл-я на изв-ю ф-ю $\varphi(x)$; $\varphi_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\xi)\sin n\xi\, d\xi$

1) $|\varphi_n|\le\frac{C}{n^6}$ (вып-но, если φ дост. гладкая и произв-е на концах обр-ся в 0)

2) $\varphi_n\sin nx_0\ge 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ и $\exists m: \varphi_m\sin m x_0>0$.

3) усл. на $g(t)$: $g(t)\in C^1[0,T]$; $g'(t)<0$, $\forall t\in[0,T]$; $g(t)=u(x_0,t)$, $g(0)=\varphi(x_0)$

Применим к ур. $k=Ak$ принцип сжим-их отобр-ий. Исп-ем пр-во $C[0,T_0]$, $T_0\in[0,T]$

$$\mathcal{K}=\{k\in C[0,T_0],\ 0\le k(t)\le k_0,\ \forall t\in[0,T_0]\}$$

Нужно док-ть, что $A\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$

$\forall k\in\mathcal{K}$ оп-р опр-ён, т.к., поскольку $|\varphi_n|\le\frac{C}{n^6}$, ряд

$$u_{xx}(x_0,t;k)=-\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n n^2 e^{-n^2\int_0^t k(\tau)d\tau}\sin nx_0<0$$ сх-ся, общий член $\sim\frac{1}{n^4}$

$(Ak)(t)$ - непр-ен по t $\forall k\in\mathcal{K}$ (из этого же ряда)

$$0\le Ak\le k_0\quad \forall k\in\mathcal{K}$$

Очевидно, что $(Ak)(t)>0$ $\forall k\in\mathcal{K}$, т.к. $(Ak)(t)=\frac{\overbrace{g'(t)}^{<0}}{\underbrace{u_{xx}(x_0,t;k)}_{<0}}>0$

Докажем, что $(Ak)(t) \le k_0 \quad \forall k \in K$

$$(Ak)(t) = \frac{g'(t)}{u_{xx}(x_0,t;k)} \le \frac{\|g'(t)\|_{C[0,T_0]}}{\varphi_m m^2 e^{-m^2 k_0 T_0} \sin m x_0} \le k_0 \text{ при усл-ии}$$

$$\frac{\|g'\|_{C[0,T_0]}}{\varphi_m m^2 \sin m x_0} \le e^{-m^2 k_0 T_0} k_0 \quad \text{① усл.}$$

2) Усл-е сжатия $\|Ak_1 - Ak_2\|_{C[0,T_0]} \le \|g'\|_{C[0,T_0]} \max\limits_{t\in[0,T_0]} \frac{|u_{xx}(x_0,t;k_1) - u_{xx}(x_0,t;k_2)|}{u_{xx}(x_0,t;k_1) u_{xx}(x_0,t;k_2)}$

$$\le \|g'\|_{C[0,T_0]} \frac{1}{\varphi_m^2 m^4 (\sin m x_0)^2} e^{2m^2 k_0 T_0} \max_{t\in[0,T_0]} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 \sin n x_0 \cdot \left| e^{-n^2 \int_0^t k_1(\tau)d\tau} - e^{-n^2\int_0^t k_2(\tau)d\tau} \right|$$

и т.к. $|e^{-x} - e^{-y}| \le |x-y|$ по ф-ле конечн-х приращ. Лагранжа, то

$$\|Ak_1 - Ak_2\|_{C[0,T_0]} \le \frac{\|g'\|_{C[0,T_0]} e^{2m^2 k_0 T_0}}{\varphi_m^2 m^4 (\sin m x_0)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^4 \sin n x_0 \left| \int_0^{t \le T_0} (k_1(\tau) - k_2(\tau)) d\tau \right| \le$$

$$\le \frac{\|g'\|_{C[0,T_0]} e^{2m^2 k_0 T_0}}{\varphi_m^2 m^4 (\sin m x_0)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n \sin n x_0) n^4 T_0 \|k_1 - k_2\|_{C[0,T_0]}.$$

усл. сжатия: $\frac{\|g'\|_{C[0,T_0]} e^{2m^2 k_0 T_0}}{\varphi_m^2 m^4 \sin m x_0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\varphi_n \sin n x_0) n^4 < 1$ — ② усл. огр-я на k_0, T_0

Полагая $k_0 T_0 = 1$ можно за счёт выбора T_0 добиться вып-я ① и ②, делая T_0 маленьким.

Теорема док-на. Реш-е ОЗ сущ. и ед. в малом.

Усл-е $\varphi_n \sin n x_0 \ge 0$ означает, что все гармоники $\varphi_n \sin nx$ в т. $x = x_0$ складыв-ся с одним знаком.

Теорема (ед-ти). Пусть $\varphi(x)$ удовл. сформулир. ранее услов. Тогда реш. $\boxed{\text{ОЗ!}}$ $i=1,2,\ 0\le t\le T$.

Док-во. $u(x_0,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(s)\sin ns\,ds\,\sin nx_0\, e^{-n^2\int_0^t k_i(\tau)d\tau}=g(t)$

Предпол-им, что $k_1(t), k_2(t)$ – реш. ОЗ ($k_i(t)\in C[0,T]$, $k_i(t)>0$); $(i=1)-(i=2)$ ⇒

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin nx_0\Big[\underbrace{e^{-n^2\int_0^t k_1(\tau)d\tau}}_{=e^{-p_1}}-\underbrace{e^{-n^2\int_0^t k_2(\tau)d\tau}}_{=e^{-p_2}}\Big]=0,\quad 0\le t\le T$$

Ф-ла Лагранжа $f(p_1)-f(p_2)=\int_0^1 f'(p_2+\theta(p_1-p_2))d\theta\,(p_1-p_2)$. Применим её для разности в $[\ldots]$ ⇒ $e^{-p_1}-e^{-p_2}=-\int_0^1 e^{-p_2-\theta(p_1-p_2)}d\theta\,(p_1-p_2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin nx_0\int_0^1 e^{-n^2\int_0^t k_2(\tau)d\tau-\theta\left(n^2\int_0^t k_1(\tau)d\tau-n^2\int_0^t k_2(\tau)d\tau\right)}d\theta\left(n^2\int_0^t (k_2(\tau)-k_1(\tau))d\tau\right)=0$$

или $\Phi(t)\int_0^t[k_1(\tau)-k_2(\tau)]d\tau=0$, $0\le t\le T$, где

$$\Phi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin nx_0\, n^2\int_0^1 e^{-n^2\int_0^t[k_2(\tau)+\theta(k_1(\tau)-k_2(\tau))]d\tau}d\theta$$

Если всюду $\Phi(t)\ne0$, то $\int_0^t[k_1(\tau)-k_2(\tau)]d\tau=0$ $\forall t\in[0,T]$ ⇒

⇒ $k_1(t)=k_2(t)$ $\forall t\in[0,T]$. Это следует из усл. теоремы

Запишем ОЗ в виде $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-n^2\int_0^t k(\tau)d\tau}\sin nx_0=g(t)$ или $Bk=g$

Очевидно, что $\exists\, g'(t)\in C[0,T]$ явл. необх. усл-ем разр-ти.

Для задачи $Bk=g$ не вып-ны усл-я уст-ти из $C[0,T]$ в $C[0,T]$.

Действит., расс-м $k_\ell(t)=k(t)+k_0\cos\ell t>0$, $k_0>0$. Тогда

$\|k_\ell(t)-k(t)\|_{C[0,T]}=k_0$ при $\ell\to\infty$, тогда как $\|Bk_\ell-Bk\|_{C[0,T]}\to0$, при $\ell\to\infty$

Задача упрощается, если $\varphi(x)=\sin mx$. Тогда $e^{-m^2\int_0^t k(\tau)d\tau}\sin mx_0=g(t)$

⇒ $-m^2k(t)e^{-m^2\int_0^t k(\tau)d\tau}\sin mx_0=g'(t)$ ⇒

⇒ $k(t)=-\dfrac{g'(t)}{m^2g(t)}$ ⇒ $\left.\begin{array}{l}g'(t)g(t)<0\\ g'(t)<0\end{array}\right\}$ – необх. усл. разреш. ⇐ $g(0)=\sin mx_0$.

ОЗ Штурма-Лиувилля и её связь с ОЗ для УРЧП.

(1) $-y''(t,\lambda) + q(t)y(t,\lambda) = \lambda y(t,\lambda)$, $0<t<\pi$

(2) $y(0,\lambda)\sin\alpha + y'(0,\lambda)\cos\alpha = 0$, $0\le\alpha,\beta\le\pi$

(3) $y(\pi,\lambda)\sin\beta + y'(\pi,\lambda)\cos\beta = 0$,

(1)-(3) – задача Ш-Л для ур-я Шредингера – найти с.ф. и с.зн. λ_n. $\{\lambda_n\}$ – с.зн. действ-е, $\lambda_n \to \infty$ при $n\to\infty$

$y(t,\lambda_n)$ – с.ф. – нетрив-е реш-я. Они взаим. ортог-ны. Нормируем в $L_2[0,\pi]$; $y(t,\lambda_n)$ образуют ортонорм. базис.

ПЗ Ш-Л. Дана $q(t)$. Найти $\{\lambda_n\}$, $\{y(t,\lambda_n)\}$

ОЗ№1 Ш-Л. Дано $\{\lambda_n\}$. Найти $q(t)$ – реш-е этой задачи неод-но. Добавим усл.

(4) $y(\pi,\lambda)\sin\gamma + y'(\pi,\lambda)\cos\gamma = 0$, $0\le\gamma\le\pi$, $\gamma\ne\beta$

Для задачи (1),(2),(4) – с.з. $\{\mu_n\}$

св-ва с.з.

1) С.з. λ_n действ-ны
2) $\lambda_n\to\infty$ $n\to\infty$, $\lambda_0<\lambda_1<\dots$, с.з. – простые
3) $y_n(t,\lambda_n) = y(t,\lambda_n)$ – О.Н.С. в $L_2[0,\pi]$
4) $\lambda_0 \ge q_0 = \min\limits_{t\in[0,\pi]} q(t)$

ОЗ№2 Ш-Л. Даны $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$, $n=1,2,\dots$ Найти $q(t)$. Задача имеет ед. реш-е

ОЗ№3 Ш-Л. Даны $\{\lambda_n\}$, изв., что $q(t)$: $q(t)=q(\pi-t)$ и гр. усл. симм-ны, т.е. $\alpha=-\beta$. Тогда $q(t)$ восст. однозн-но.

(1) $u_t = u_{xx} - q(x)u$, $0<x<\pi$, $t>0$, $\boxed{q(x)\ge 0}$ $q\not\equiv 0$ или $q(x)\ge 0$

(2) $u_x(0,t) = 0$, $t>0$ $\nu(t)\in C^1(0,\infty)$; $\nu(0)=0$, $\nu(t)=0$ при $t\ge T_0$

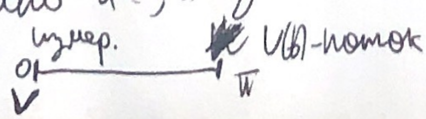
(3) $u_x(\pi,t) = \nu(t)$, $t>0$

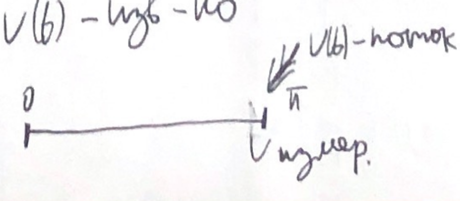
(4) $u(x,0) = 0$, $0\le x\le\pi$

(1)-(4) – прямая задача; ОЗ: $q(x)$ неизв-на. Доп. информ.

ОЗ 1. Дано $u(0,t) = h(t)$ => найти $q(x)$, $\nu(t)$ – изв-но

ОЗ 2. Дано $u(\pi,t) = g(t)$. Найти $q(x)$, $\nu(t)$ – изв-но

ОЗ 1 

ОЗ 2 

ОЗ 2 лучше чем ОЗ 1

Преобр. (1)-(4) с помощью интегр. преобр. Лапласа

$v(x,p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x,t)\,dt$, $\mathrm{Re}\,p \geq 0$ (т.к. $\lambda_n > 0$, то $u(x,t) \to 0$ при $t \to \infty$ как $e^{-\lambda_0 t}$)

$\int_0^\infty e^{-pt} u_t(x,t)\,dt = u(x,t)\cdot e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} u(x,t)\,dt = p\,v(x,p)$

$p\,v(x,p) = v_{xx}(x,p) - q(x)\,v(x,p)$

$$\begin{cases} v_{xx}(x,p) - q(x)\,v(x,p) = p\,v(x,p), \quad 0<x<\pi & (5)\\ v_x(0,p) = 0 & (6)\\ v_x(\pi,p) = \tilde{V}(p) & (7)\end{cases}$$

Рассм. реш-е ур-я (5) $w(x,p)$ с усл-ем $w(0,p) = 1$, $w_x'(0,p) = 0$

$w(x,p)$ – аналит-я по компл-ой перем. p.

при $\mathrm{Re}\,p$ $v(x,p)$ и $w(x,p)$ лин. зависимы, т.к. явл. реш-ем одного ОДУ и $(\;)_x' = 0$ в т. $x=0$. Действ-но

$W(w,v) = \begin{vmatrix} w' & v' \\ w & v \end{vmatrix}_{x=0} = \overset{0}{w_x'}(0,p)\,v(0,p) - w(0,p)\,\overset{0}{v_x'}(0,p) = 0$, но тогда

опр. Вронского

$W(w,v) = 0$ всюду на $[0,\pi]$, т.е. w и v лин. зав. $\Rightarrow v(x,p) = C(p)\,w(x,p)$

из усл (7): $C(p)\,w_x'(\pi,p) = \tilde{V}(p)$ или $C(p) = \dfrac{\tilde{V}(p)}{w_x'(\pi,p)}$, откуда

$v(x,p) = \dfrac{\tilde{V}(p)\,w(x,p)}{w_x'(\pi,p)}$ – это представ-е реш. ПЗ

Вернёмся к ОЗ 2. Из доп. гр. усл. $u(\pi,t) = g(t) \Rightarrow v(\pi,p) = \int_0^\infty e^{-pt} g(t)\,dt = \tilde{g}(p)$

Ед-ть реш. ОЗ 2.

Пусть $\exists\, q_1(x)$ и $q_2(x)$ такие, что $u_1(\pi,t) = u_2(\pi,t) = g(t)$. Им соотв-ют v_1 и v_2. Тогда $v_1(\pi,p) = v_2(\pi,p)$. $\dfrac{\tilde{V}(p)\,w_1(\pi,p)}{w_{1,x}'(\pi,p)} = \dfrac{\tilde{V}(p)\,w_2(\pi,p)}{w_{2,x}'(\pi,p)}$, где

$$\begin{cases} w''(x,p) - q(x)\,w(x,p) = p\,w(x,p)\\ w'(0,p) = 0\\ w(0,p) = 1\end{cases}$$

Пусть p_n нуль $w'(\pi,p)$, т.е. $w'(\pi,p_n)=0$, но тогда $-p_n$ – с.з. Ш-Л с усл. $w'(0,p)=0$, $w'(\pi,p)=0$.

Нули $w(\pi,p)$ $\hat{p}_n$, т.е. $w(\pi,\hat{p}_n)=0$ дают $-\hat{p}_n$ – с.з. Ш-Л с усл. $w'(0,p)=0$, $w(\pi,p)=0$

Все нули $\hat{p}_n$ и p_n разл-ны, иначе приходим к задаче Коши с нач. усл. $w(\pi,p_n)=w'(\pi,p_n)=0 \Rightarrow w(t,p_n)\equiv 0$, но $w(0,p)=1$ $\forall p$.

Имеем $\dfrac{w_1(\pi,p)}{w'_{1,t}(\pi,p)} = \dfrac{w_2(\pi,p)}{w'_{2,t}(\pi,p)} \Rightarrow$ Все нули $\begin{matrix} w_1(\pi,p) = \text{нулям } w_2(\pi,p) \\ w_1'(\pi,p) = \text{нулям } w_2'(\pi,p) \end{matrix} \Leftrightarrow$

для q_1 Зад. Ш-Л $\begin{matrix} y'(0)=0, & y(\pi)=0 & - \lambda_n^{(1)} \text{ – нули числ.} \\ y'(0)=0, & y'(\pi)=0 & - \mu_n^{(1)} \text{ – нули зн.} \end{matrix}$

для q_2 Зад. Ш-Л $\begin{matrix} y'(0)=0, & y(\pi)=0 & - \lambda_n^{(2)} \text{ – нули числ.} \\ y'(0)=0, & y'(\pi)=0 & - \mu_n^{(2)} \text{ – нули зн.} \end{matrix}$

$\lambda_n^{(1)}=\lambda_n^{(2)}$ и $\mu_n^{(1)}=\mu_n^{(2)}$, $n=1,2,\ldots \Rightarrow q_1(t)=q_2(t)$ – ед-ть

ОЗ 2 хорошая

ОЗ 1 знаем $v(0,p)=v_2(0,p)$ (т.к. $u_1(0,t)=u_2(0,t)=h(t)$)

$\Rightarrow \dfrac{\tilde{v}(p)\,w_1(0,p)}{w_1'(\pi,p)} = \dfrac{\tilde{v}(p)\,w_2(0,p)}{w_2'(\pi,p)} \Rightarrow w_1'(\pi,p)=w_2'(\pi,p)$

Инф. меньше, равны лишь спектры одной задачи Ш-Л, ед. нет.

Случай неизв-го ист-ка тепла

Св-ва соб. зн. задачи

$$-y''(t,\lambda)+q(t)\,y(t,\lambda)=\lambda\, y(t,\lambda),\quad 0<t<\pi,\quad q(t)\geq q_0$$

$$y'(0,\lambda)=y'(\pi,\lambda)=0$$

1) С.з. λ_n действ-ны

2) $\lambda_n\to\infty$ $n\to\infty$, $\lambda_0<\lambda_1<\ldots$, с.з. - простые

3) $y_n(t,\lambda_n)=y(t,\lambda_n)$ - о.н.с, в $L_2[0,\pi]$

4) $\lambda_0\geq q_0=\min\limits_{t\in[0,\pi]} q(t)$

Док-во (от противного). $\exists$ $\lambda_0<q_0$, т.е. $\lambda_0<q(t)$ $\forall t\in[0,\pi]$. Тогда $y''(t,\lambda_0)\equiv y_0''(t)=(q(t)-\lambda_0)y_0(t)$, где $q(t)-\lambda_0>0$. Т.к. $y_0(0)\neq 0$, то пусть $y_0(0)=a>0$. Но тогда $y_0(t)>0$ и $y_0'(t)$ $\forall t\in[0,\pi]$, что противоречит $y_0'(\pi)=0$ или $y_0(\pi)=0$.

Пусть теперь для $U(t)$ вып. доп. усл. $U(t)>0$ при $0<t<T_0$ и $q(t)\geq 0$.

Тогда в ОЗ (1)-(4) по $g(t)$ однозн. опр. $q(x)$ и $U(t)$

Док-во. $\tilde{U}(p)=\int\limits_0^{T_0} U(t)e^{-pt}dt>0$ для $\forall p$ - действ-го

Из рав-ва $v_1(\pi,p)\equiv v_2(\pi,p)$ имеем $\dfrac{\tilde{U}_1(p)\,w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)}=\dfrac{\tilde{U}_2(p)\,w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)}$ при $\operatorname{Re}p\geq 0$

и в силу аналит-ти всюду на компл. пл-ти (p)

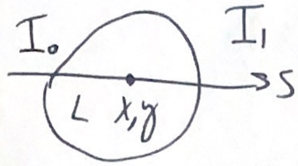
Нули ф-ий $w_j(\pi,p)$ и $w_j'(\pi,p)=-\lambda_n$ и $=-\mu_n$ - с.з. задач Ш-Л. Но $\lambda_n\geq 0$, $\mu_n\geq 0$, т.е. $w_j(\pi,p)$, $w_j'(\pi,p)$ обращ. в нуль только на п/п $\operatorname{Re}p\leq 0$,

$U_j(p)\neq 0$ на $p\in\mathbb{R}$.

$\dfrac{w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)}=\dfrac{w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)}$, т.к. совпадают их нули и полюса, т.е. $q_1(t)=q_2(t)$

$\Rightarrow \tilde{U}_1(p)=\tilde{U}_2(p)$.

Задачи комп-ой томографии.

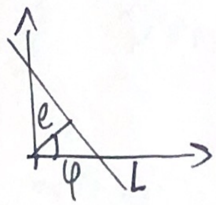


$$\frac{dI}{ds} = -\gamma\rho(x,y)I \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\gamma\rho(x,y)\Big|_{\substack{x(s)\\ y(s)}} ds$$

Это феноменологический закон убывания интенс-ти

$$\Rightarrow I_1/I_0 = \exp\left\{-\gamma\int_{s_0}^{s_1}\rho(x,y)\,ds\right\} \Rightarrow \int_L \rho(x,y)\,ds \ \forall \text{ прямой } L$$

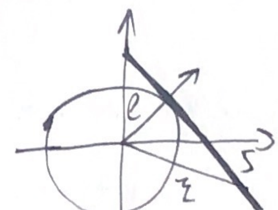
Рассм. матем. постановку



$L(\ell,\varphi)$: $x\cos\varphi + y\sin\varphi = \ell$, $-\infty<\ell<\infty$, $0\le\varphi\le 2\pi$

Опр. Отобр-е ф-ии $f(x,y)$ вида $\int\limits_{L(\ell,\varphi)} f(x,y)\,ds = u(\ell,\varphi)$

наз. преобр-ем Радона



Осн. задача - обратить преобр-е Радона, т.е. по $u(\ell,\varphi)$ найти $f(x,y)$, $f\in C(\mathbb{R}^2)$

Т.к. преобр-е Радона $\exists$ не $\forall f$, добавим убывание на ∞:

$$|f(x,y)|\le \frac{C}{(1+x^2+y^2)^{1+\varepsilon}};\quad \int_0^\infty |f(\xi)|\,d\xi \le \int_0^\infty \frac{C}{(1+\xi^2)^{1+\varepsilon}}\,d\xi<\infty$$

Рассм. параметр-е представ-е прямой $L(\ell,\varphi)$:

$x(s) = \ell\cos\varphi - s\sin\varphi$, $-\infty<\ell<\infty$, $\varphi\in[0,2\pi]$ $\Rightarrow L(\ell,\varphi) = L(-\ell,\varphi+\pi)$.

$y(s) = \ell\sin\varphi + s\cos\varphi$,

Нет вз. однозн. соотв-я, поэтому либо $\ell\ge 0$, либо $\varphi\in[0,\pi]$.

Запишем преобр. Радона для парам. прямой

$$u(\ell,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\ell\cos\varphi - s\sin\varphi, \ell\sin\varphi + s\cos\varphi)\,ds;$$ Док-ем, что инт-л сх-ся

$x^2(s)+y^2(s) = \ell^2+s^2$

$$|u(\ell,\varphi)| \le \int_{-\infty}^{\infty}|f(\sim)|\,ds \le \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C\,ds}{(1+\ell^2+s^2)^{1+\varepsilon}}<\infty$$ Рассм. при $|\ell|\to\infty$

$$|u(\ell,\varphi)| \le \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+\ell^2)^{1/2}\,ds/(1+\ell^2)^{1/2}}{(1+\ell^2)^{1+\varepsilon}(1+s^2/(1+\ell^2))^{1+\varepsilon}} \le \frac{1}{(1+\ell^2)^{1/2+\varepsilon}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{1+\varepsilon}} \sim \frac{1}{\ell^{1+2\varepsilon}}$$

$|u(\ell,\varphi)| \le \frac{c_1}{\ell^{1+2\varepsilon}}$ при $|\ell| \ge 1$.

Проекционная теорема

Опр-им пр. Фурье. $\hat{f}(\omega_1,\omega_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i(\omega_1 x+\omega_2 y)}\,dx\,dy$

Теорема. $\hat{f}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) = \hat{u}(\omega,\varphi)$.

Док-во: (прямым вычисл-ем). $\hat{f}(\omega\cos\varphi,\omega\sin\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i\omega(x\cos\varphi+y\sin\varphi)}$

$dx\,dy = \left\{\begin{array}{l} \text{Замена } (x,y)\to(\ell,s) \\ \left|\dfrac{D(x,y)}{D(\ell,s)}\right| = 1 \text{ -поворот} \end{array}\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\ell\cos\varphi - s\sin\varphi, \ell\sin\varphi + s\cos\varphi) \circledast$

$x = \ell\cos\varphi - s\sin\varphi$ $\quad x\cos\varphi + y\sin\varphi = \ell$

$y = \ell\sin\varphi + s\cos\varphi$

$\circledast\, e^{-i\omega\ell}\,ds\,d\ell = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{u(\ell,\varphi)\,e^{-i\omega\ell}\,d\ell}$ сх-ся, т.к. $|u(\ell,\varphi)| \le \frac{c_1}{\ell^{1+2\varepsilon}}$ при $\ell\to\infty$

Следствия. 1. Ед-ть реш. задачи

$Rf_1 = u,\ Rf_2 = u \Rightarrow f_1 = f_2$

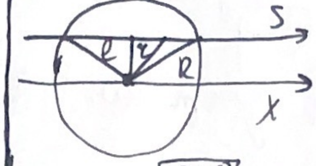
Док-во: Преобр Радона лин-е, т.о. $f = f_1 - f_2$ и $Rf = 0$ из проекц. теоремы $\hat{f} = 0 \Rightarrow \bar{f} = 0$

2. Алг-тм реш-я задачи комп-ой томогр-ии

$$\boxed{u(\ell,\varphi)} \xrightarrow{\text{БПФ}(\mathbb{R}^1)} \boxed{\hat{u}(\omega,\varphi)} \xrightarrow[\text{теорема}]{\text{проекц.}} \boxed{\hat{f}(\omega\cos\varphi,\omega\sin\varphi)} \xrightarrow[\text{в декарт. сис}]{\text{пересчет}} \boxed{\hat{f}(\omega_1,\omega_2)} \xrightarrow{\text{БПФ}^{-1}(\mathbb{R}^2)} \boxed{f(x,y)}$$

Задачи комп-ой томографии в случае радиальной сим-ии

$$f(x,y) = \begin{cases} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), & \text{при } x^2+y^2 \le R^2 \\ 0, & x^2+y^2 > R^2 \end{cases}$$



$$u(\ell,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\ell\cos\varphi - s\sin\varphi, \ell\sin\varphi + s\cos\varphi)\,ds = \int_{-\sqrt{R^2-\ell^2}}^{\sqrt{R^2-\ell^2}} f\left(\sqrt{\ell^2+s^2}\right)ds = 2\int_0^{\sqrt{R^2-\ell^2}} f\left(\sqrt{\ell^2+s^2}\right)ds =$$

$\ell^2+s^2 = r^2 \Rightarrow s\,ds = r\,dr,\ ds = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\ell^2}}$

$= 2\int_\ell^R f(r)\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\ell^2}} = u(\ell)$ — интегр. ур-е I рода с перем. пределами и

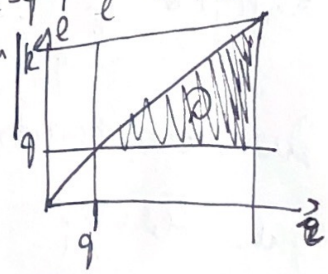
и особ. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ в знамен. — ур-е Абеля. Особ. интегр.

Общий вид ур-я Абеля $\int_0^t \frac{f(s)\,ds}{(t-s)^\alpha} = u(t)$

Для ур-я Абеля можно получить явное реш-е $\int_q^R \frac{\ell\,d\ell}{\sqrt{\ell^2-q^2}} \Big| \ 2\int_\ell^R \frac{f(r)\,r\,dr}{\sqrt{r^2+(-\ell^2)}} = u(\ell)$

$$\int_q^R \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2-q^2}} \int_\ell^R \frac{2r\,f(r)\,dr}{\sqrt{r^2-\ell^2}}\,d\ell = \int_q^R \frac{\ell\,u(\ell)\,d\ell}{\sqrt{\ell^2-q^2}}.$$

Поменяем местами порядок интегр.-я



$$\iint_D \frac{2r\,\ell\,f(r)\,dr\,d\ell}{\sqrt{(\ell^2-q^2)(r^2-\ell^2)}} = \int_q^R 2r\,f(r)\int_q^r \frac{\ell\,d\ell}{\sqrt{(\ell^2-q^2)(r^2-\ell^2)}}\,dr.$$

Введем z: $\ell^2 = (r^2-q^2)\frac{z}{2} + (r^2+q^2)\frac{1}{2}$, замена $\ell \to z$

$2\ell\,d\ell = (r^2-q^2)\frac{dz}{2},\quad \ell^2-q^2 = (r^2-q^2)(z+1)/2,\quad r^2-\ell^2 = (r^2-q^2)\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{2}\right),$

$$\sqrt{(\ell^2-q^2)(r^2-\ell^2)} = \frac{r^2-q^2}{2}\sqrt{1-z^2} \Rightarrow \int_q^r \frac{\ell\,d\ell}{\sqrt{(\ell^2-q^2)(r^2-\ell^2)}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin z\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}.$$

Т.о. $\frac{\pi}{2}\int_q^R 2r\,f(r)\,dr = \int_q^R \frac{\ell\,u(\ell)\,d\ell}{\sqrt{\ell^2-q^2}} \Rightarrow$ дифер. по q, получим

$$q\,f(q) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dq}\int_q^R \frac{\ell\,u(\ell)\,d\ell}{\sqrt{\ell^2-q^2}} \Rightarrow$$

(1) $f(q) = -\frac{1}{\pi q}\frac{d}{dq}\int\limits_q^R \frac{l\,u(l)\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}}$. Это выраж-е опр-но не $\forall u(l)$.

$u(R)=0$, но этого не дост-но, $u(R)=0$ - необх. усл-е разр-ти ур-я Абеля.

Предположим, что можно по частям взять инт-л

$$\int\limits_q^R \frac{l\,u(l)}{\sqrt{l^2-q^2}}\,dl = \sqrt{l^2-q^2}\,u(l)\Big|_q^R{}^{=0} - \int\limits_q^R \sqrt{l^2-q^2}\,u'(l)\,dl.$$ Тогда

$$f(q) = +\frac{1}{\pi q}\frac{d}{dq}\int\limits_q^R \sqrt{(l^2-q^2)}\,u(l)\,dl = \frac{1}{\pi q}\int\limits_q^R \frac{u'(l)(-q)}{\sqrt{l^2-q^2}}\,dl \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(q) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_q^R \frac{u'(l)}{\sqrt{l^2-q^2}}\,dl \text{ и } f(0) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^R \frac{u'(l)}{l}\,dl = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{du(l)}{l}$$

Для того, чтобы (1) опр-ла непр. ф-ю, $u(l)$ должна удовл-ть усл. Гельдера с каким-либо показателем $\frac{1}{2}\le\alpha\le 1$, т.е.

$$|u(l_1)-u(l_2)|\le c\,|l_1-l_2|^\alpha.$$

Если вместо $\bar{u}(l)$ имеем $\tilde{u}(l)$, то обратная задача может не иметь реш-я.

Методы реш-я некорр-ых ОЗ на компактных мн-ах.

Рассм. ОЗ в ф-ле

(1) $Az = u$, Z, U - банаховы пр-ва, A - непр-ый опер-р; $A: Z \to U$

Предп. $\exists! \; \bar{z}: A\bar{z} = \bar{u}$, $\bar{z}$ - точное реш-е, $\bar{u}$ - точн. правая часть, но $\bar{u}$ неизвестна

и даны u_δ и δ: $\|u_\delta - \bar{u}\| \le \delta$.

Требуется построить прибл. реш-е z_δ: $\|z_\delta - \bar{z}\| \to 0$, при $\delta \to 0$

Как строить реш-е $Az = \bar{u}_\delta$, если задача некорр-на.

Естеств-но потребовать, чтобы для прибл. реш-я z_δ вып-сь нер-во

$\|Az_\delta - u_\delta\| \le \delta$.

Рассм. мн-во $Z_\delta = \{z \mid \|Az - u_\delta\| \le \delta\}$. В силу некорр-ти задачи не обяз-но, чтобы $Z_\delta \not\to \bar{z}$ при $\delta \to 0$. Дополн-е предпол-я - $\bar{z} \in M$, где M - компакт

Рассм. мн-во $Z_\delta^M = Z_\delta \cap M = \{z \mid z \in M, \|Az - u_\delta\| \le \delta\}$. $\forall \delta > 0 \; Z_\delta^M \ne \emptyset$, т.к.

$\bar{z} \in Z_\delta^M$, ибо $A\bar{z} = \bar{u}$, $\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta$.

Теорема. При $\delta \to 0$ $\sup\limits_{z \in Z_\delta^M} \|z - \bar{z}\| \to 0$.

Док-во. От противного $\exists \; \varepsilon > 0$ и $\{\delta_n\} \to 0$, $\{z_{\delta_n}\}$ такие, что $z_{\delta_n} \in Z_{\delta_n}^M$

и $\|z_{\delta_n} - \bar{z}\| \ge \varepsilon$ (выделим плохую посл-ть)

$z_{\delta_n} \in M$ - компакт, т.е. $\exists z_{n_p} \to z^* \in M$. Оп-р A непр-ен $\Rightarrow Az_{n_p} \to Az^*$ при

$\delta_{n_p} \to 0$. Но $z_{n_p} \in Z_{\delta_{n_p}}^M \Rightarrow \|Az_{n_p} - u_{\delta_{n_p}}\| \le \delta_{n_p}$ и, т.к. $\|u_{\delta_{n_p}} - \bar{u}\| \le \delta_{n_p}$,

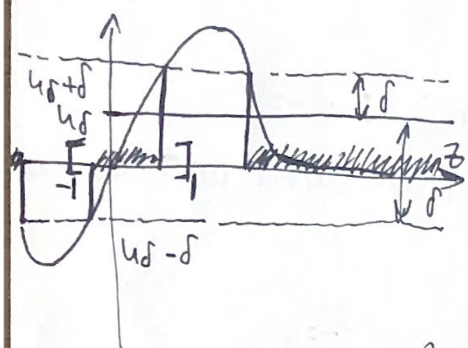
$\|Az^* - \bar{u}\| = 0 \Rightarrow Az^* = \bar{u}$ и $z^* = \bar{z}$. Т.о. $\|z_{\delta_{n_p}} - \bar{z}\| \ge \varepsilon$, с др. стороны

$\|z_{\delta_{n_p}} - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta_{n_p} \to 0$. ч.т.д.

Пример. $A: R^1 \to R^1$, $Az \equiv \frac{z}{z^2+1}$

$\exists \bar{u} = 0$, $\frac{\bar{z}}{\bar{z}^2+1} = 0 \Rightarrow \bar{z} = 0 \; \exists!$

$\{u_\delta, \delta\}$ $\quad \|u_\delta - \bar{u}\| \le \delta \sim \|u_\delta\| \le \delta$. Найти Z_δ.



Возьмём $u_\delta = \frac{\delta}{2}$

$$Z_\delta = \left\{z \,\middle|\, \left|\frac{z}{z^2+1} - \frac{\delta}{2}\right| \le \delta\right\},\ Z_\delta \text{ - неогр-но.}$$

Заштриховано Z_δ: две полупрямые и отрезок

Очевидно, что $z_\delta = \frac{2}{\delta} \in Z_\delta$, т.к. $Az_\delta = \frac{2/\delta}{4+\delta^2}\delta^2 = \frac{2\delta}{4+\delta^2}$ и

$$\frac{z_\delta}{1+z_\delta^2} - \frac{\delta}{2} = \delta\left(\frac{2}{4+\delta^2} - \frac{1}{2}\right) = \delta\left(-\frac{\delta^2}{4+\delta^2}\right)$$ и $\|Az_\delta - u_\delta\| \le \delta$, но

$\frac{2}{\delta} \not\to 0$ при $\delta \to 0$. Если же $M = [-1, 1]$, то

$$Z_\delta^M = \left[\frac{-1+\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}, \frac{1-\sqrt{1-9\delta^2}}{3\delta}\right]$$ и при дост. малых δ $Z_\delta^M \to 0$ при $\delta \to 0$.

Метод квазиреш-ий.

Опр. Эл-т $\tilde z$ наз. квазиреш-ем $Az=u$ на M, если $\tilde z = \arg\inf\limits_{z\in M}\|Az-u\|$,

т.е. $\|A\tilde z-u\| = \inf\limits_{z\in M}\|Az-u\|$. Квазиреш. $\exists$ всегда, если A – непр., т.к.

$f(z)=\|Az-u\|$ – непр. ф-л достигает точной нижней грани на компакте.

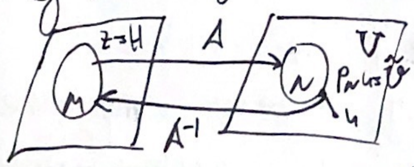
Если $\exists$ точное реш-е $\bar z$ и $\bar z\in M$, то оно явл. и квазиреш-ем, т.к.

$\bar z=\arg\inf\limits_{z\in M}\|Az-\bar u\|$, т.е. квазиреш-е совпадает с реш-ем, если $\bar u\in A_M$

Теорема. $\exists$ Z – банахово, а U – гильбертово (сепарабельное), $A: Z\to U$ – лин-ый непр-ый и $Az=0 \Rightarrow z=0$ ($\ker A=0$). Если M – выпукл. компакт в Z, то квазиреш-е $\exists!$ и уст-во (т.е. задача опр-я квазиреш-я корр-на).

1. Сущ-ет – всегда $\forall u$

2. Ед-ть – следствие однозн-ти оп-ра проектир-я P_N, где $N=AM$, $\forall u$



$\tilde z = \arg\inf\limits_{z\in M}\|Az-u\|$, но $\inf\limits_{z\in M}\|Az-u\| = \inf\limits_{v\in N}\|v-u\| = \|\tilde v-u\|$.

$\tilde v = P_N$, т.е. $\|\tilde v-u\| = \inf\limits_{v\in N}\|v-u\|$

Т.к. $\tilde v$ $\exists$ и $!$, то $\tilde z = A^{-1}\tilde v$ $\exists$ и $!$ по лемме о непр. A^{-1} (ядро оп-ра A нулевое)

Факт. Оп-р проект-я на вып-ый компакт в H однозн-но опр-ён и непр-ен ($\|P_N\|\le 1$).

Рассм. применение метода квазиреш-ий для реш-я ур-я с прибл-но заданной правой частью.

$\exists$ $A: Z\to U$ – непр. оп-р, действ. из банахова Z в банахово U. $A\bar z=\bar u$,

$\bar z$ $\exists!$, $\bar u$ – неизв-но, дано u_δ, δ: $\|u_\delta-\bar u\|\le\delta$.

Рассм. мн-во $\tilde Z^M_\delta = \{z \mid z=\arg\inf\limits_{z\in M}\|Az-u_\delta\|\} = \operatorname{Arg}\inf\limits_{z\in M}\|Az-u_\delta\|$

$\tilde{Z}^M_\delta$ - мн-во всех квазиреш-ий.

Теорема. $\exists \bar{z} \in M$. Тогда $\sup\limits_{z \in \tilde{Z}^M_\delta} \|z - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta \to 0$

Док-во. (от противного). $\exists$ сх-ти нет, т.е. $\exists \varepsilon > 0$, $\{\delta_n\} \to 0$,

и послед-ть квазиреш-ий $\{\tilde{z}_{\delta_n}\}$ такое, что $\tilde{z}_{\delta_n} \in \tilde{Z}^M_{\delta_n}$ и $\|\tilde{z}_{\delta_n} - \bar{z}\| \geq \varepsilon$.

Но $\tilde{z}_{\delta_n} \in M$ - компакту, т.е. $\exists$ подпосл-ть $\tilde{z}_{\delta_{n_p}} \to z^* \in M$

$\|A\tilde{z}_{\delta_{n_p}} - u_{\delta_{n_p}}\| = \inf\limits_{z \in M} \|Az - u_{\delta_{n_p}}\| \leq \|A\bar{z} - u_{\delta_{n_p}}\| = \|\bar{u} - u_{\delta_{n_p}}\| \leq \delta_{n_p} \Rightarrow$

$\|A\tilde{z}_{\delta_{n_p}} - u_{\delta_{n_p}}\| \leq \delta_{n_p}$. A - непр-ен $\Rightarrow$ $\tilde{z}_{\delta_{n_p}} \to z^*$ при $p \to \infty$ $\Rightarrow \|Az^* - \bar{u}\| = 0$

$\Rightarrow z^* = \bar{z}$ - противоречие: с одной стороны $\tilde{z}_{\delta_{n_p}} \to \bar{z}$, с другой

$\|\tilde{z}_{\delta_{n_p}} - \bar{z}\| \geq \varepsilon$. ч.т.д.

Метод №1. $Z^M_\delta = \{z \mid z \in M, \|Az - u_\delta\| \leq \delta\}$ - необх-мо знать δ для того, чтобы знать, когда ост-ть процесс минимиз-ии.

Метод №2. (Квазиреш-ий) $\tilde{Z}^M_\delta = \{z \in M \mid z = \arg\inf \|Az - u_\delta\|\} =$

$= \operatorname{Arg}\inf\limits_{z \in M} \|Az - u_\delta\|$. - δ знать не ~~требуется~~, но минимиз-я проводится до конца.

Компакты.

① $\mathbb{R}^n$: ог-ть + замкнутость = компакт

② $C[a,b]$: дост. усл. комп-ти: равн. ог-ть и равн-я непр-ть + замк-ть = компакт.

Пример M. в $C[a,b]$: $|f(t)| \leq C$ $\forall t \in [a,b]$,

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$; $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$. По т. Арцела это мн-во-компакт

Липшиц - непр-ть.

Метод регуляризации Тихонова. Случай лин-го оп-ра.

Некоторые сведения из функц. анализа

Опр. $z_n \xrightarrow{сл} z^*$ в H (гильб. пр-во), если $(z_n, v) \to (z^*, v)$ $\forall v \in H$

Св-ва слабой сх-ти:

1. Если $z_n \xrightarrow{сл} z^*$, то $\|z^*\| \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|z_n\|$
2. Если $z_n \xrightarrow{сл} z^*$ и A - вполне непр., то $Az_n \to Az^*$, где $A: H \to U$.
3. Если $\|z_n\| \le C$, то $\exists \{z_{n_p}\} \subset \{z_n\}: z_{n_p} \xrightarrow{сл} z^* \in H$ (шар в H слабокомпактен)
4. Если $z_n \xrightarrow{сл} z^*$ и $\|z_n\| \to \|z^*\|$, то $z_n \to z^*$

Пример. $\sin nx \xrightarrow[\pi]{сл} 0$ в $L_2[0,\pi]$

$\|z_n(t)\|^2 = \frac{\pi}{2} \not\to 0$, $\int\limits_0^\pi z_n(t)\, v(t)\, dx \to 0$ при $n \to \infty$. Этим св-ом обл-ет $\forall$ о.н. базис в H.

$Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$; Z, U - гильб-вы, A - вп. непр. $A\bar{z} = \bar{u}$, $\bar{z}\ \exists!$

$\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta$. Даны $\{u_\delta, \delta\}$, требуется построить $z_\delta \to \bar{z}$ при $\delta \to 0$

Рассм ф-л $M^\alpha[z, u] = \|Az - u\|_U^2 + \alpha \|z\|_Z^2$, $\alpha > 0$; u - $\forall$фикс. эл-т из U

Теорема 1. Для любых $u \in U$ и $\alpha > 0$ $\exists!$ эл-т z_α, на котором дост.

$\min\limits_Z M^\alpha[z, u]$ на Z, т.е. $\exists z_\alpha^* = \arg\inf\limits_{z\in Z} M^\alpha[z, u]$

Док-во. $M^\alpha[z, u] \ge 0$ $\forall u, \alpha > 0 \Rightarrow m^* = \inf\limits_{z \in Z} M^\alpha[z, u] \ge 0$. Если $\exists \inf M^\alpha$, то

$\exists$ минимизир-я посл-ть $\{z_n\}$, т.е. $M^\alpha[z_n, u] \to m^*$, $n \to \infty$. Будем считать её

монотонной, т.е. $M^\alpha[z_n, u] \le M^\alpha[z_{n-1}, u]$. Тогда $M^\alpha[z_n, u] \le M^\alpha[z_1, u] = C$

След-но, $\|z_n\|^2 < \frac{C}{\alpha}$, т.е. $\{z_n\}$ огр-на $\Rightarrow z_n$ слабокомпактна, т.е.

$\exists \{z_{n_k}\} \xrightarrow{сл} z^* \in Z$.

По св-ву сл. сх-ти $\|z^*\| \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|z_{n_k}\|$

A - вполне непр., $z_{n_k} \to$ сл. $z^* \Rightarrow Az_{n_k} \to Az^*$, откуда $M^\alpha[z^*, u] = m^*$

Действ-но,

1) Пусть $\forall \varepsilon > 0$. Т.к. z_{n_k} – минимиз-я, то $M^\alpha[z_{n_k}, u] \le m^* + \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall k \geq N_1(\varepsilon)$

2) Т.к. $Az_{n_k} \to Az^*$, то $\exists N_2(\varepsilon)$: $\|Az^* - u\|^2 \le \|Az_{n_k} - u\| + \varepsilon/3$ $\forall k \geq N_2(\varepsilon)$

3) Т.к. $\|z^*\| \le \underline{\lim} \|z_{n_k}\|$, то $\exists N_3(\varepsilon)$: $\alpha\|z^*\|^2 \le \alpha \|z_{n_k}\|^2 + \varepsilon/3$ $\forall k \geq N_3(\varepsilon)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$: $\forall k \geq N(\varepsilon)$ $M^\alpha[z^*, u] = \|Az^* - u\|^2 + \alpha\|z^*\|^2 \le \|Az_{n_k} - u\|^2 + \frac{\varepsilon}{3} +$

$N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$

$+ \alpha\|z_{n_k}\|^2 + \frac{\varepsilon}{3} \le M^\alpha[z_{n_k}, u] + \frac{2}{3}\varepsilon \le m^* + \varepsilon$

Т.о. $M^\alpha[z^*, u] \le m^* + \varepsilon = \inf\limits_{z \in Z} M^\alpha[z, u] + \varepsilon \Rightarrow M^\alpha[z^*, u] = m^*$ в силу произв-ти ε.

Замечание. Нигде не исп-сь, что опер-р A – лин-ый.

Док-но сущ-е т. $\min\limits_{z \in Z} M^\alpha[z, u]$

Ед-ть. $M^\alpha[z, u] = \|Az - u\|^2 + \alpha\|z\|^2$ – функц-л сильно вып-ый, т.к. явл. суммой вып-го и сильно вып-го ф-лов, то точка min ед-на (очевидно из прот-я)

Опр. Ф-л $\Phi(z)$ наз. сильно вып-м, если $\exists c > 0$:

$$\Phi(\varkappa z_1 + (1-\varkappa) z_2) \le \varkappa \Phi(z_1) + (1-\varkappa)\Phi(z_2) - \varkappa(1-\varkappa) c \|z_1 - z_2\|^2 \quad \forall \varkappa \in [0, 1] \quad \forall z_1, z_2 \in Z.$$

Необх-е и дост-е усл-е минимума. Ур-е Эйлера.

Получим ур-е для т-ки $\min\limits_{z\in Z} M^\alpha[z,u]$, т.е необх. усл. Докажем, что $M^\alpha[z,u]$ – мин-ый ср-л.

Рассм. $M^\alpha[z+h,u] - M^\alpha[z,u] = (A(z+h)-u, A(z+h)-u) + \alpha(z+h, z+h) - (Az-u, Az-u) + \alpha(z,z) = \cancel{(Az-u, Az-u)} + (Ah,Ah) + (Ah, Az-u) + (Az-u, Ah) + \cancel{\alpha(z,z)} + \alpha(h,z) + \alpha(z,h) + \alpha(h,h) - \cancel{(Az-u, Az-u)} - \cancel{\alpha(z,z)} = (Ah, Az-u) + (Az-u, Ah) + (Ah,Ah) + \alpha(h,z) + \alpha(z,h) + \alpha(h,h) = 2(Ah, Az-u) + 2\alpha(h,z) + (Ah,Ah) + \alpha(h,h) = 2(h, A^*(Az-u)) + 2\alpha(h,z) + (Ah,Ah) + \alpha(h,h) = \underbrace{2(A^*(Az-u) + \alpha z, h)}_{\text{лин-ый ср-л}} + O(\|h\|)$

т.е. $M^\alpha[z,u]$ диффер. в $\forall$ т. $z\in Z$ и $\frac{\partial M^\alpha[z,u]}{\partial z} = \operatorname{grad} M^\alpha[z,u] = 2(A^*(Az-u)+\alpha z)$; $\quad dM^\alpha[z,u] = (\operatorname{grad} M^\alpha[z,u], dz)$

В т-ке min z^*

(1) $\quad (A^*A + \alpha E) z^* = A^* u$ – ур-е Эйлера – необх-е усл-е min.

Оно явл-ся и дост-ым.

Док-во. (от прот-го). Пусть $\tilde z$ – реш. (1). Тогда $M^\alpha[\tilde z, u] = m^*$ $\xRightarrow{\text{от прот-го}}$

Пусть это неверно, т.е. $M^\alpha[\tilde z,u] > m^*$. Тогда $\exists\, z^* = \arg\inf\limits_{z\in Z} M^\alpha[z,u]$ и в силу необх. усл. z^* – реш. ур-я (1), тогда $\tilde z$ и z^* – два реш. (1) $\Rightarrow z = \tilde z - z^*$ – реш. однородн. ур-я Эйлера. Т.е. $(A^*A + \alpha E) z = 0$, $z \neq 0 \Rightarrow 0 = (A^*A + \alpha E z, z) = (Az, Az) + \alpha(z,z) \geq \alpha\|z\|^2 > 0$ – прот-е.

Постр-е прибл. реш-я.

Теорема 2. $\exists\, \alpha = \alpha(\delta)$, такое, что $\alpha(\delta) > 0$ при $\delta > 0$ и $\alpha(\delta) \to 0$, $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \to 0$ при $\delta \to 0$. Тогда $\|z_{\alpha(\delta)} - \bar z\| \to 0$ при $\delta \to 0$, где

$$z_{\alpha(\delta)} = \arg\inf_{z\in Z} \{\|Az - u_\delta\|^2 + \alpha\|z\|^2\}.$$

Док-во. (от против-го). $\exists\ \exists \varepsilon > 0$ и $\{\delta_n\} \to 0$, $\{z_{\alpha(\delta_n)}\}$ такие, что

$\| z_{\alpha(\delta_n)} - \bar{z} \| \geq \varepsilon > 0$, где $z_{\alpha(\delta_n)} = \arg \inf\limits_{z \in Z} M^{\alpha(\delta_n)}[z, u_{\delta_n}]$.

Имеем $M^{\alpha(\delta_n)}[z_{\alpha(\delta_n)}, u_{\delta_n}] \leq M^{\alpha(\delta_n)}_{\bar{u}}[\bar{z}, u_{\delta_n}]$, т.е.

$\| A z_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n} \|^2 + \alpha(\delta_n) \| z_{\alpha(\delta_n)} \|^2 \leq \| A\bar{z} - u_{\delta_n} \|^2 + \alpha(\delta_n) \| \bar{z} \|^2 \leq \delta_n^2 + \alpha(\delta_n) \| \bar{z} \|^2$

① $\alpha(\delta_n) \| z_{\alpha(\delta_n)} \|^2 \leq \delta_n^2 + \alpha(\delta_n) \| \bar{z} \|^2$

② $\| A z_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n} \|^2 \leq \delta_n^2 + \alpha(\delta_n) \| \bar{z} \|^2$.

Из ① $\Rightarrow \| z_\alpha(\delta_n) \|^2 \leq \dfrac{\delta_n^2}{\alpha(\delta_n)} + \| \bar{z} \|^2 \leq C_1$, откуда следует, что

$\exists \{ z_{\alpha(\delta_{n_k})} \} \xrightarrow{сл} z^*$. $\| z^* \| \leq \underline{\lim} \| z_{\alpha(\delta_{n_k})} \| \leq \overline{\lim} \| z_{\alpha(\delta_{n_k})} \| \leq \| \bar{z} \|$

Из ② и того, что $z_{\alpha(\delta_{n_k})} \xrightarrow{сл} z^* \Rightarrow A z_{\alpha(\delta_{n_k})} \to A z^*$, т.к. A - вполне непр. Но $\| A z_{\alpha(\delta_{n_k})} - u_{\delta_{n_k}} \|^2 \leq \delta_{n_k}^2 + \alpha(\delta_{n_k}) \| \bar{z} \|^2$, откуда

$\| A z_{\alpha(\delta_{n_k})} - \bar{u} \| \leq \| A z_{\alpha(\delta_{n_k})} - u_{\delta_{n_k}} \| + \underbrace{\| \bar{u} - u_{\delta_{n_k}} \|}_{\leq \delta_{n_k}} \to 0$

т.е. $A z^* = \bar{u}$. Т.к. реш-е ед-но, то $z^* = \bar{z} \Rightarrow$

$\| \bar{z} \| \leq \underline{\lim} \| z_{\alpha(\delta_{n_k})} \| \leq \overline{\lim} \| z_{\alpha(\delta_{n_k})} \| \leq \| \bar{z} \|$, след-но $\| z_{\alpha(\delta_{n_k})} \| \to \| \bar{z} \|$,

$\delta_{n_k} \to 0$ и $z_\alpha(\delta_{n_k}) \xrightarrow{сл.} \bar{z} \Rightarrow z_{\alpha(\delta_{n_k})} \to \bar{z}$ в Z.